

Учреждение Российской академии наук  
Институт ядерных исследований РАН

На правах рукописи

Климай Петр Александрович

# Ограничения на концентрацию первичных черных дыр и их космологические следствия

01.04.16 - физика атомного ядра и элементарных частиц

**Диссертация**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н. Бугаев Э. В.

Москва – 2010

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Возможности рождения первичных черных дыр в моделях инфляции</b>	<b>23</b>
1.1 Спектр возмущений кривизны и его вычисление . . . . .	23
1.2 Примеры спектров возмущений кривизны с пиками . . . . .	27
1.2.1 Двугорбый потенциал . . . . .	27
1.2.2 Потенциал Коулмена-Вайнберга . . . . .	32
1.2.3 “Крученный” потенциал . . . . .	35
1.3 Инфляционная модель с “бегущей массой” . . . . .	37
1.3.1 Описание модели . . . . .	37
1.3.2 Расчет спектра скалярных возмущений . . . . .	40
1.3.3 Эффекты квантовой диффузии . . . . .	42
<b>Глава 2. Спектры масс первичных черных дыр и ограничения на спектр первичных скалярных возмущений</b>	<b>50</b>
2.1 Спектр масс первичных черных дыр . . . . .	50
2.1.1 Общие формулы . . . . .	50
2.1.2 Модели гравитационного коллапса . . . . .	55
2.1.3 Временная зависимость гравитационного потенциала	59
2.1.4 Спектр мощности с максимумом . . . . .	63
2.2 Спектры фотонов и нейтрино от испарения первичных черных дыр . . . . .	67
2.3 Ограничения на спектр флуктуаций с максимумом . . . . .	72

2.4	Ограничения на модель с “бегущей массой” . . . . .	75
2.5	Первичные черные дыры как темная материя . . . . .	79

**Глава 3. Первичные черные дыры и фон индуцированных гравитационных волн** **84**

3.1	Фон гравитационных волн и его возможные источники . . .	84
3.1.1	Генерация гравитационных волн во время инфляции	85
3.1.2	Модели прехитинга . . . . .	87
3.1.3	Фазовые переходы первого рода в ранней Вселенной .	88
3.1.4	Космические струны . . . . .	89
3.1.5	Сценарии “до большого взрыва” . . . . .	89
3.1.6	Модели мира на бране . . . . .	90
3.1.7	Испарение первичных черных дыр . . . . .	90
3.2	Генерация индуцированных гравитационных волн . . . . .	90
3.2.1	Связь частоты с массой горизонта . . . . .	91
3.2.2	Вычисление спектра гравитационных волн . . . . .	93
3.2.3	Случай $\delta$ -пика в спектре скалярных возмущений . . .	97
3.2.4	Расчет плотности энергии гравитационных волн . . .	97
3.3	Пик конечной ширины . . . . .	102
3.3.1	Зависимость от ширины пика . . . . .	102
3.3.2	Сравнение с возможностями эксперимента . . . . .	104
3.4	Максимально возможный фон индуцированных гравитационных волн . . . . .	106
3.5	Модель инфляции с “бегущей массой” . . . . .	109
3.6	Обсуждение результатов . . . . .	112

<b>Глава 4. Экспериментальный поиск черных дыр на финальной стадии испарения</b>	<b>114</b>
4.1 Поиск испаряющихся первичных черных дыр в окрестности Земли . . . . .	114
4.2 Теоретическая неопределенность спектра фотонов от испарения черной дыры . . . . .	117
4.3 Расчет энергетических и временных характеристик гамма-всплесков . . . . .	124
4.3.1 Модель с прямой фрагментацией кварков . . . . .	124
4.3.2 Хромосферные модели . . . . .	127
4.3.3 Временные характеристики всплесков . . . . .	131
4.3.4 Аппроксимационные формулы . . . . .	133
4.4 Возможности экспериментального поиска и обсуждение имеющихся результатов . . . . .	134
<b>Заключение</b>	<b>138</b>
<b>Список литературы</b>	<b>140</b>

# Введение

Разработанная А. Эйнштейном теория пространства-времени и гравитации - Общая теория относительности (ОТО) имеет много важных научных и философских следствий и, в частности, предсказывает ряд эффектов, делающих возможной ее опытную проверку: отклонение света в гравитационном поле, замедление хода часов, гравитационное красное смещение, и другие. Некоторые из этих эффектов уже обнаружены экспериментально - в земных условиях или при астрономических наблюдениях. Фридмановская модель расширяющейся Вселенной, основанная на ОТО, блестяще подтвердилась и является теперь основой современной Стандартной космологической модели.

Другим важным следствием теории является возможность существования черной дыры - объекта, который, по наивному определению, поглощает все, что попадает достаточно близко к нему, и не выпускает ничего во внешний мир. И хотя идея о возможности существования черных дыр высказывалась еще в XVIII веке Д. Мичеллом и П.-С. Лапласом (на основе ньютоновской теории гравитации и классических представлений о свете), важно, что черные дыры в ОТО - объекты, существование которых прямо следует из последовательной теории пространства-времени и гравитации.

Как хорошо известно, ОТО рассматривает гравитацию как искривление пространства-времени. В слабых полях - например таких, с которыми мы имеем дело в Солнечной Системе, это искривление относительно небольшое, и ОТО переходит в свой предельный случай - ньютоновскую механику и теорию тяготения. Только малые эффекты вроде небольшо-

го сдвига перигелия орбиты Меркурия со временем говорят о неполноте ньютоновской картины. В случае черной дыры, мы имеем дело с другим предельным случаем теории - случаем сильного поля. Гравитация здесь настолько мощна, что меняет, образно выражаясь, не только геометрию, но и топологию пространства-времени, рождая область с полупроницаемой границей - черную дыру, в которую можно “влететь”, но “вылететь” из которой уже невозможно.

Еще одним характерным предсказанием ОТО является существование гравитационных волн (ГВ) - тензорных возмущений космологической метрики, свободно распространяющихся со скоростью света.

Несмотря на многочисленные косвенные указания, ни черные дыры, ни гравитационные волны до сих пор не были обнаружены в прямом эксперименте, т.е. ОТО остается непроверенной в ряде важнейших предельных случаев. Кроме того, современные теории ранней Вселенной утверждают, что в ней возможно было рождение черных дыр (например, в результате эволюции первичных флуктуаций плотности), и фона реликтовых ГВ (например, в результате эволюции квантовых флуктуаций метрики), поэтому поиски первичных черных дыр и реликтовых ГВ (или хотя бы установление экспериментальных пределов на их концентрацию) существенны для проверки различных моделей развития нашей Вселенной в первые мгновения ее существования (в частности, инфляционной модели).

**Актуальность темы данного исследования**, таким образом, обусловлена необходимостью:

- развития методов проверки ОТО и разных космологических моделей;

- поиска новых возможностей для детектирования первичных черных дыр (ПЧД) и получения космологических ограничений на их концентрацию;

- выяснения связи концентрации ПЧД с другими важными космологическими параметрами, такими как спектры скалярных и тензорных возмущений;

- изучения возможностей существующих и будущих экспериментов, которые прямо или косвенно могут дать информацию о ПЧД.

### **История вопроса.**

Идея возможности образования ПЧД была впервые высказана в работах Зельдовича и Новикова [1] и Хокинга [2]. Они отметили, что, хотя в современной Вселенной невозможно рождение черных дыр малых масс (масса черных дыр  $M_{BH}$ , образующихся в результате звездной эволюции, должна быть больше или порядка солнечной массы  $M_{\odot}$ ), в условиях горячей ранней Вселенной могут рождаться черные дыры (называемые, вследствие своего происхождения, первичными) с массами порядка величины массы горизонта в момент их образования,

$$M_{BH} \sim M_h \sim \frac{c^3 t}{G} \sim 10^{15} \left( \frac{t}{10^{-23} \text{ s}} \right) \text{ г.} \quad (1)$$

Если время образования ПЧД  $t$  достаточно мало,  $M_{BH}$  может иметь практически любой порядок величины, начиная от планковского (масса Планка  $m_{Pl} = 2 \times 10^{-5} \text{ г}$ ).

Для рождения черной дыры необходим, однако, достаточный контраст плотности  $\delta \equiv \delta\rho/\rho \sim 1$ , т.е. ранняя Вселенная должна быть неоднородной. Согласно Карру и Хокингу [3], в момент прохождения флуктуации с

избыточной плотностью под горизонт (когда  $k = aH$ , где  $k$  - сопутствующее волновое число флуктуации плотности,  $a$  - масштабный фактор,  $H$  - функция Хаббла), должно быть

$$1/3 < \delta < 1. \quad (2)$$

Таким образом, ясно, что для рождения ПЧД из флуктуаций плотности их характерная среднеквадратичная амплитуда должна быть достаточно велика,  $\bar{\delta} \gtrsim 10^{-2}$ . Если верно предположение Гarrisона и Зельдовича [4, 5] о масштабной инвариантности спектра начальных возмущений (в этом случае  $\bar{\delta}$  одинакова для первичных флуктуаций, соответствующих любым  $k$ ), то рождение ПЧД за счет рассматриваемого механизма – крайне маловероятный процесс, т.к. на масштабах сопутствующих волновых чисел  $k \sim 10^{-3} \text{ Мпк}^{-1}$  амплитуда первичных скалярных возмущений известна и мала: по данным современных экспериментов, измеряющих анизотропию реликтового излучения (таких как WMAP [6]), спектр мощности сопутствующих возмущений кривизны

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \cong 2.4 \times 10^{-9}, \quad (3)$$

и  $\bar{\delta} \sim \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{1/2} \sim 10^{-5}$ . Однако современные теоретические модели, как правило, предсказывают отклонения от строгой масштабной инвариантности, и ПЧД могут быть использованы для проверки таких моделей в широкой области  $k$ .

В случае гауссового спектра первичных флуктуаций, доля  $\beta(M_h)$  областей во Вселенной (на масштабе массы горизонта  $M_h$ ), имеющих контраст



плотности больше  $\delta_c$ , равна [7, 8]

$$\beta(M_h) = \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sigma(M_h)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{2\sigma(M_h)^2}\right] d\delta \sim \sigma(M_h) \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M_h)^2}\right], \quad (4)$$

где  $\sigma(M_h)$  - сглаженный контраст плотности на соответствующем масштабе. В случае, если  $\delta_c$  - пороговое значение контраста плотности, начиная с которого начинается образование черных дыр, то формула (4) приближенно дает массовую долю черных дыр во Вселенной на момент их образования. При этом масса образующейся черной дыры (ЧД) считается примерно равной массе горизонта в момент образования.

Плотность энергии, заключенная в ПЧД, зависит от времени. Для уже образовавшихся и неиспаряющихся черных дыр, учитывая разное уравнение состояния излучения и “газа” из ПЧД, на сегодняшний момент получаем для доли плотности Вселенной в ПЧД [7]

$$\Omega_{PBH} \approx 10^6 \beta (t[\text{sec}])^{-1/2} \approx 10^{18} \beta \left(\frac{M_h}{10^{15}\text{g}}\right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Последнее выражение получено в предположении, что масса ПЧД не меняется со временем. Используя (5), простое ограничение на концентрацию ПЧД можно установить из требования, что  $\Omega_{PBH} < 1$ :

$$\beta \lesssim 10^{-18} \left(\frac{M_h}{10^{15}\text{g}}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

На самом деле, это ограничение верно лишь для ПЧД с массами  $M_{BH} \gtrsim 10^{15}$  г, что связано со знаменитым эффектом их испарения, открытым Хокингом.

До его пионерских работ [9] считалось, что черная дыра - объект, который может только поглощать материю, и ничего не может выйти из нее за

пределы гравитационного радиуса, равного  $r_g = 2M_{BH}/m_{Pl}^2$ . Однако, как было показано, каждая черная дыра должна испускать в вакуум стационарный поток частиц, то есть “испаряться”. На интуитивном уровне, можно представлять себе хокинговское излучение как результат поглощения черной дырой одной частицы из виртуальной пары частица - античастица, которые постоянно рождаются и аннигилируют друг с другом в вакууме. В сильном гравитационном поле ЧД возникает вероятность одной из частиц (находящейся в состоянии с отрицательной энергией) быть поглощенной, а другой уйти на бесконечность, унося часть энергии ЧД.

Температура Хокинга, характеризующая излучение черной дыры, равна

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_g} = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}}; \quad (7)$$

$$T_H = 1.06 \left( \frac{M_{BH}}{10^{13}g} \right)^{-1} \text{ GeV}. \quad (8)$$

Если температура черной дыры достаточно высока, из нее могут испускаться, в принципе, частицы любой массы, в том числе и еще не открытые. Если обозначить  $g_*$  - эффективное число степеней свободы частиц с  $m \lesssim T_H$ , то энергия, теряемая ЧД в единицу времени, равна

$$\dot{M}_{BH} \equiv -\frac{\alpha(M_{BH})}{M_{BH}^2} \approx -\frac{\pi^2}{30} g_* T_{BH}^4 \cdot 4\pi r_g^2 \approx -4 \times 10^{-5} g_* \frac{m_{Pl}^4}{M_{BH}^2}. \quad (9)$$

Размерный коэффициент  $\alpha$ , как и  $g_*$ , зависит от температуры ЧД. Если учитывать только частицы Стандартной Модели, то при высоких энергиях  $g_* \approx 100$ .

Из (9) следует важный для космологии вывод: любая черная дыра испаряется за время  $\sim 10^{-28}(M/1g)^3$  сек, и, таким образом, ПЧД массой менее

примерно  $M_* \approx 5 \times 10^{14}$  г испаряются за время жизни Вселенной, бóльшие же могли бы дожить и до сегодняшнего дня, и именно к ним относится предел (6).

В работе Пэйджа и Хокинга [10] был выведен другой предел на концентрацию ПЧД в сегодняшней Вселенной, основанный на наблюдении внегалактического фона гамма-квантов с энергиями порядка 100 МэВ:

$$\Omega_{PBH} \lesssim 10^{-8}. \quad (10)$$

В этой работе предполагался спектр масс ПЧД, ожидаемый в случае масштабно - инвариантного спектра возмущений (тогда, как было показано Карром [7], спектр масс ПЧД пропорционален  $M_{BH}^{-5/2}$  для масс, больших  $M_*$ ).

Ограничение (10) можно переписать в терминах  $\beta$  [11], считая что оно соответствует массам черных дыр порядка  $M_*$ . Используя (5, 10), получаем

$$\beta(M_*) \lesssim 10^{-18} \Omega_{PBH} \lesssim 10^{-26}, \quad (11)$$

что до сих пор является одним из наиболее сильных пределов на  $\beta$  во всей области масс ПЧД.

В области меньших масс ПЧД имеются ограничения, полученные из других соображений. В работе Зельдовича и Старобинского [12] было впервые рассмотрено влияние испарения ПЧД на фон реликтового микроволнового излучения. Они заметили, что фотоны, испущенные достаточно рано ( $M_{BH} \lesssim 10^9$  г), полностью термализуются, и ограничения на концентрацию ПЧД следуют в этой области масс только из требования, чтобы фотон-барионное отношение не нарушалось (оставалось на уровне  $\sim 10^9$ ).

Полученный предел выглядит как

$$\beta(M_{BH}) \lesssim 10^{-5} \left( \frac{M_{BH}}{10^9 \text{g}} \right)^{-1}, \quad M_{BH} < 10^9 \text{g}, \quad (12)$$

так что только ПЧД с массами менее  $10^4$  г могли бы быть ответственны за генерацию всего реликтового излучения.

В той же работе [12] было отмечено, что излучение ПЧД с массами  $10^{11} - 10^{13}$  г, хотя и частично термализуется, может давать существенные искажения спектра микроволнового излучения, из чего следует ограничение

$$\beta(M_{BH}) \lesssim 10^{-16} \left( \frac{M_{BH}}{10^{11} \text{g}} \right)^{-1}, \quad 10^{11} \text{g} < M_{BH} < 10^{13} \text{g}. \quad (13)$$

В промежуточной области масс при этом происходит плавный переход от предела (12) к гораздо более сильному пределу (13).

Ряд ограничений на концентрацию ПЧД был также выведен из соображений ненарушения первичного нуклеосинтеза, начиная с пионерской работы [13], где рассматривались эффекты инъекции высокоэнергичных нуклонов и антинуклонов от ПЧД. В этой работе было предложено, что такая инъекция увеличит наблюдаемую концентрацию дейтерия за счет захвата свободных нейтронов протонами и развала ядер  ${}^4\text{He}$  испускаемыми ПЧД частицами. В других работах изучались эффекты инъекции нейтрино и антинейтрино [14], производства энтропии ПЧД [15], фотодиссоциации дейтерия фотонами, испущенными ПЧД [16], возможности нарушения нейтрон-протонного отношения [17].

Пределы на функцию  $\beta(M_{BH})$ , получаемые из первичного нуклеосинтеза, были уточнены в работах [18, 19] с учетом современных представлений

о механизме испарения сильно взаимодействующих частиц из ПЧД и экспериментальных данных. В области  $10^{10} - 10^{13}$  г получается ограничение  $\beta \lesssim 10^{-23}$ , в то время как для  $10^9 - 10^{10}$  г,  $\beta \lesssim 10^{-18}$ . Более полный обзор всех существующих пределов на  $\beta(M_{BH})$  может быть найден в недавних работах [19, 20, 21].

Заметим, что само описание концентрации ПЧД в рамках параметра  $\beta$  (предполагая, при этом, что все ПЧД рождаются с одинаковыми массами) является довольно грубым приближением к действительности. Численные расчеты, проведенные в работах [22], показывают, что гравитационный коллапс с образованием ПЧД является критическим явлением, и это приводит к образованию в спектре масс ПЧД степенного “хвоста” в области  $M_{BH} \ll M_h$ , так что учет ненулевой ширины спектра масс в этом случае (проведенный впервые в [23]) особенно важен. Расчет спектра масс ПЧД для заданного спектра первичных возмущений плотности может быть проведен на основе формализма Пресса-Шехтера [24], такие расчеты проводились ранее в [25, 26, 27, 28, 29].

В любом случае, значительное рождение ПЧД из флуктуаций плотности возможно либо если  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  растет с уменьшением масштаба (увеличением  $k$ ), либо в случае, когда спектр имеет, в силу каких-либо причин, максимум (или ряд максимумов) в области больших  $k$  (например,  $k \sim 10^{10} - 10^{20}$  Мпк $^{-1}$ ). Такие максимумы могут возникать как в инфляционных моделях с одним скалярным полем [30, 31, 32] (в этом случае в определенные промежутки времени инфляционный потенциал имеет особенности, приводящие к замедлению темпа инфляции - например, локальный максимум, через

который поле в процессе инфляции медленно “переваливается”), так и в более сложных моделях с несколькими полями. В последнем случае имеется, как правило, два этапа инфляции, иногда разделенных периодом медленного расширения. Тот факт, что скалярных полей в модели несколько, не является недостатком этих моделей, а скорее наоборот, поскольку реалистичную теорию трудно построить, используя только одно поле. Пример - модель с тремя скалярными полями, основанная на супергравитации [33]. В этой модели двойной инфляции флуктуации с наибольшей амплитудой рождаются непосредственно перед началом второго этапа инфляционного расширения.

ПЧД небольшой массы ( $\sim 10^{15}$  г) могут также рождаться и в моделях послеинфляционного разогрева (“прехитинга”). Флуктуации скалярных полей в эту эпоху могут сильно (экспоненциально) усиливаться в результате параметрического резонанса и (или) тахионной нестабильности [34, 35, 36]. В ряде работ показано, что при некоторых значениях параметров моделей, описывающих эти явления, возможно интенсивное рождение ПЧД (особенно следует отметить недавнюю работу [37], из которой следует, что достаточное для рождения ПЧД усиление флуктуаций возможно даже в модели с одним полем, если имеет место тахионная нестабильность). Понятно, что имеющиеся наблюдательные ограничения на концентрацию ПЧД должны приниматься во внимание при конструировании моделей прехитинга.

Величина спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  может достигать больших значений и как результат монотонного роста значения спектра [38], если потенциал инфляционного поля подобран соответствующим образом. В частности, речь идет

о потенциалах класса “hill-top” (“вершина холма”) [39], частным случаем которого является потенциал модели с “бегущей массой” [40, 41].

Большой интерес представляет вопрос о связи концентрации ПЧД во Вселенной и спектра ГВ, который, возможно, удастся измерить экспериментально существующими или планируемыми в будущем детекторами. Образование фона ГВ от коллапсов черных дыр (в том числе первичных) рассматривалось в [42], но в случае ПЧД оказывается, что этот фон достаточно мал. Коалесценция (слияние) ПЧД с массами  $\sim 0.5M_{\odot}$  [43], находящихся в галактическом гало, могла бы дать сигнал, который смогут измерить наземные интерферометры типа LIGO/Virgo. Хокинговское испарение гравитонов из ПЧД также дает высокочастотный фон гравитационных волн [44]. Кроме того, черная дыра массы  $\sim 10^{14} - 10^{20}$  г, пролетающая мимо космического интерферометра типа LISA, также может вызвать детектируемый гравитационный импульс [45].

Принципиально новый способ получения ограничений на концентрацию ПЧД из наблюдений гравитационных волн был недавно предложен Сайто и Йокоямой [46]. Оказывается, что большие значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ , необходимые для рождения ПЧД, во втором порядке космологической теории возмущений приводят к рождению фона ГВ достаточно большой величины. В частности, имеющиеся в области частот  $f \sim 10^{-8}$  Гц ограничения на этот фон (полученные из наблюдений пульсаров) позволяют дать очень жесткие пределы на возможную концентрацию ПЧД больших масс (порядка  $10^2 M_{\odot}$ ). Фон индуцированных гравитационных волн оказывается, таким образом, новым важным свидетельством возможного существования ПЧД и спосо-

бом измерения как их концентрации, так и величины спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  [47].

Другим важным вопросом является проблема прямого экспериментального поиска испаряющихся ПЧД. Как мы видели, ПЧД с начальными массами  $M_* \approx 5 \times 10^{14}$  г сейчас должны находиться на финальной стадии своего испарения, давая потоки высокоэнергичных частиц. Гамма-кванты, излученные таким образом, можно было бы регистрировать, например, наземными ливневыми установками. Необходимо учитывать, что кроме прямого хокинговского потока испаряемых черной дырой фотонов, имеется еще вклад вторичных частиц, образованных в распадах адронов, в свою очередь родившихся в результате фрагментации испаренных кварков (этот вклад доминирует при низких энергиях). В классической работе МакГиббон и Веббера [48] был рассчитан спектр вторичных частиц в предположении, что продукты испарения между собой не взаимодействуют. Хеклер [49] поставил под сомнение это предположение, высказав простые аргументы в пользу того, что за счет сильных (и даже электромагнитных) взаимодействий вокруг черной дыры при высоких температурах может образоваться тепловая фото- или хромосфера. Понятно, что если образование хромосферы имеет место, то это необходимо учитывать при интерпретации данных экспериментов по поиску гамма-вспышек от ПЧД. В недавней работе МакГиббон, Карра и Пэйджа [50], однако, приводятся доводы в пользу того, что хромосфера не образуется в силу нескольких физических и геометрических причин. Тем не менее, задачу об испарении черной дыры в любом случае нельзя считать до конца решенной. Во всяком случае, процессы формирования спектра хокинговского излучения нельзя отделить от про-



цессов взаимодействия испаряемых частиц, происходящих на расстояниях от центра черной дыры, превышающих (в некоторых моделях значительно) ее гравитационный радиус.

**Целью диссертационной работы** является анализ возможностей реализации сценариев, при которых происходит рождение значительного количества ПЧД, разработка методов вычисления их концентрации в таких случаях и получение космологических ограничений на спектр возмущений кривизны и величину фона индуцированных гравитационных волн из имеющихся экспериментальных данных, а также изучение возможностей прямого детектирования испаряющихся ПЧД.

#### **Научная новизна и практическая ценность результатов.**

Впервые прямым численным расчетом показана возможность образования высокого пика в спектре возмущений кривизны, генерируемом на инфляционной стадии в модели с двугорбым потенциалом  $V(\phi) \sim (\phi^2 - v^2)^2$ . Возможность достижения спектром больших значений также показана для некоторых других моделей, в том числе для модели с потенциалом “бегущей массы”. В последнем случае проведен тщательный анализ и установлено, что для рождения значительного количества ПЧД требуется очень небольшой положительный бег индекса спектра скалярных возмущений на космологических масштабах:  $n'_0 \sim 0.005$ . С использованием формализма “крупнозернистого поля” рассмотрен вопрос о применимости описания инфляции в терминах классических траекторий в фазовом пространстве. Показано, что для корректности такого описания начальное значение поля должно быть не слишком близко к максимуму потенциала.

Разработан новый метод расчета спектров масс ПЧД, основанный на формализме Пресса-Шехтера и явно учитывающий зависимость гравитационного (бардиновского) потенциала от времени (без привлечения передаточных функций). Для получения спектра масс ПЧД, на входе задачи необходим спектр возмущений кривизны  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ , получаемый, например, из разных инфляционных моделей. С использованием этого метода, проведены расчеты спектров масс ПЧД для нескольких предсказываемых видов  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  в моделях, где возможны его достаточно большие значения.

Из экспериментальных данных по внегалактическим фонам электронных антинейтрино и гамма-квантов, а также из ограничений на долю плотности ПЧД во Вселенной получены ограничения на параметры спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  в модели с пиком в спектре первичных возмущений плотности в области малых масштабов. Для инфляционной модели с “бегущей массой” получены ограничения на ее параметры в терминах наблюдаемых величин  $n_0$  и  $n'_0$  (спектральный индекс и его производная).

Впервые изучена форма спектра индуцированных гравитационных волн в модели с пиком конечной ширины в  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  и в модели с “бегущей массой”. Показано, что энергетическая доля плотности индуцированных ГВ на логарифмический интервал  $k$ ,  $\Omega_{GW}(k)$ , может достигать значений  $\sim 10^{-7}$  в области частот  $10^{-3} - 10^3$  Гц, важной для современных экспериментов, не входя в противоречие с данными по ПЧД. Существующие ограничения на величину спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  использованы для получения предела на величину фона индуцированных гравитационных волн во Вселенной,  $\Omega_{GW}$ , в интервале частот  $10^{-3} - 10^3$  Гц.

Проведены расчеты спектров гамма-квантов и временных параметров вспышки для общепринятой и некоторых нестандартных моделей испарения черной дыры (на последней стадии этого испарения). Показана модельная зависимость прямых экспериментальных пределов и необходимость использования новых методов регистрации ПЧД в случае, если вокруг черной дыры образуется фото- или хромосфера.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

1) Показано, что первичные флуктуации плотности с амплитудой, достаточной для рождения в ранней Вселенной первичных черных дыр могут возникать в ряде инфляционных моделей с одним скалярным полем. Рассмотрены два типа таких моделей: модель с двугорбым инфляционным потенциалом и модель с инфляционным потенциалом с бегущей массой.

2) Разработан способ вычисления спектра масс первичных черных дыр в общем случае произвольной зависимости спектра первичных возмущений плотности от сопутствующего размера области возмущения, а также в случае зависимости гравитационного потенциала от времени.

3) Получены ограничения на параметры инфляционных потенциалов в моделях с большими флуктуациями плотности, основанные на сравнении предсказанных в этих моделях диффузных внегалактических потоков фотонов и нейтрино, возникающих при испарении рождающихся первичных черных дыр, с данными экспериментов.

4) Получены ограничения на амплитуды индуцированных гравитационных волн в области больших частот (порядка  $10^{-3} - 10^3$  Гц), основанные на уже имеющихся (из поисков ПЧД) ограничениях на спектр первичных

флуктуаций плотности.

5) Изучены временные и энергетические характеристики гамма-всплесков, генерируемых ПЧД на конечной стадии испарения.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты, полученные в диссертации, доложены на 30-й и 31-й Международных конференциях по космическим лучам (Мексика, Мерида, 2007 и Польша, Лодзь, 2009), 15-м Международном семинаре QUARKS'08 (Россия, г. Сергиев Посад, 2008), 50-й, 51-й и 52-й Научных конференциях МФТИ (Россия, г. Долгопрудный, 2007-2009), 30-й Всероссийской конференции по космическим лучам (Россия, г. Санкт-Петербург, 2008) и Международной школе по астрофизике элементарных частиц ISAPP (Италия, Сорренто, 2006), а также на семинарах ИЯИ РАН.

Основные результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 15 работах. Их список приведен в конце списка литературы.

### **Структура диссертации.**

В **первой главе** рассматриваются теоретические модели ранней Вселенной, предполагающие фазу инфляционного расширения. Рассчитывается спектр возмущений кривизны, генерируемый при разных предположениях о форме потенциала поля инфлатона. Внимание уделяется моделям, в которых спектр может достигать достаточно больших значений, не входя в противоречие с существующими данными эксперимента. Показывается, что такими свойствами обладает ряд моделей с потенциалами достаточно простой формы, если параметры потенциала надлежащим образом подобраны, объясняется важность использования численного расчета и непри-

менимость простых формул, получаемых в приближении “медленного скачивания”. Подробно изучается инфляционная модель с “бегущей массой”, в том числе вопрос о применимости описания инфляции в терминах классических траекторий в фазовом пространстве.

Во **второй главе** излагается метод расчета спектров масс ПЧД, основанный на формализме Пресса-Шехтера и явно учитывающий зависимость гравитационного потенциала от времени. Проводятся расчеты спектров масс в конкретных случаях, в частности, для случаев спектров первичных возмущений, рассмотренных в главе 1. Получается ряд ограничений на параметры некоторых моделей ранней Вселенной и спектр возмущений кривизны.

**Третья глава** посвящена вопросу о связи ПЧД и ГВ, индуцированных скалярными возмущениями. Проводятся расчеты спектров индуцированных ГВ для разных случаев спектра скалярных возмущений ( $\delta$ -функция, пик конечной ширины, спектр модели с “бегущей массой”). Проводится сравнение с имеющимися экспериментальными данными. Получен предел на максимальную величину фона индуцированных ГВ, который следует из ограничений по ПЧД, выведенных ранее в работе (в главе 2).

В **четвертой главе** рассматривается вопрос о возможности обнаружения ПЧД на последней стадии испарения в экспериментах, регистрирующих гамма-кванты высоких энергий. Приводятся аргументы в пользу того, что задача об испарении черной дыры еще не решена окончательно, и существующие теоретические неопределенности могут оказать существенное влияние на интерпретацию данных экспериментов. Даются примеры

расчетов спектров гамма-квантов и временных параметров вспышки для некоторых моделей испарения. Приводятся обзор и обсуждение существующих экспериментальных результатов.

В **заключении** подводятся итоги работы и перечисляются ее основные результаты.

# Глава 1. Возможности рождения первичных черных дыр в моделях инфляции

## 1.1 Спектр возмущений кривизны и его вычисление

Предположение о существовании фазы ускоренного расширения в ранней Вселенной - инфляции [51, 52, 53] позволяет решить ряд вопросов стандартной космологии “большого взрыва”. Инфляция также обеспечивает естественный механизм генерации первичных скалярных возмущений, которые наблюдаются сегодня и ответственны за появление всей крупномасштабной структуры во Вселенной: эти возмущения появляются в результате эволюции квантовых флуктуаций полей, движущих инфляционную стадию.

Простейшие инфляционные модели предполагают существование только одного скалярного поля - инфлатона  $\phi$ , лагранжиан которого содержит, наряду со стандартным кинетическим членом, потенциальную часть  $V(\phi)$ ; форма этого потенциала, вообще говоря, не известна. В случае пространственной однородности, плотность энергии и давление скалярного поля равны

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) ; \quad p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) , \quad (14)$$

и, если кинетический член мал в сравнении с  $V(\phi)$ , то  $w \equiv p/\rho \approx -1$ , что обеспечивает инфляционную фазу. Изменение  $\phi$  со временем определяется уравнением Клейна-Гордона в расширяющемся пространстве:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 , \quad (15)$$

а параметр Хаббла  $H(t) \equiv \dot{a}/a$  на инфляционной стадии дается уравнением Фрийдмана,

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (16)$$

Для рассмотрения малых возмущений поля инфлатона запишем его как сумму

$$\phi_p(t, \vec{x}) = \phi(t) + \delta\phi(t, \vec{x}), \quad (17)$$

где  $\phi(t)$  соответствует пространственно однородной части, а  $\delta\phi(t, \vec{x})$  - возмущение, которое зависит от выбора калибровки. Удобно работать в калибровочно - инвариантном формализме (см., например, обзор [54]), используя переменную Лукаша - Чибисова - Муханова - Сасаки [55, 56, 57]

$$u = a\delta\phi \Big|_{\text{flat}}, \quad (18)$$

где  $\delta\phi$  вычисляется в пространственно-плоской калибровке. Другая удобная переменная, зависящая только от фоновых величин,

$$z = \frac{a\dot{\phi}}{H}. \quad (19)$$

В терминах  $u$  и  $z$ , уравнение для Фурье-компоненты  $u$ , соответствующей сопутствующему волновому числу  $k$ , записывается в виде

$$u_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (20)$$

т.е. выглядит как уравнение для осциллятора с переменной массой. Когда физический размер флуктуации  $ak^{-1}$  много меньше, чем размер горизонта  $H^{-1}$  (т. е.,  $aH \ll k$ ), решение уравнения (20) с учетом нормализации,



задаваемой квантовым происхождением флуктуаций, есть

$$u_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ikt} \quad (21)$$

(вакуум Бунча-Дэвиса [58]). В противоположном случае,  $aH \gg k$ , решение уравнения (20), соответствующее растущей со временем моде, есть  $u_k \sim z$ . Этот режим соответствует постоянству Фурье-компоненты сопутствующего возмущения кривизны,  $\mathcal{R}_k$ , которая равна

$$\mathcal{R}_k = \frac{u_k}{z}, \quad (22)$$

а спектр мощности сопутствующих возмущений кривизны дается формулой

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} |\mathcal{R}_k|^2. \quad (23)$$

Используя (20) и (22), мы получаем уравнения для  $\mathcal{R}_k$  в виде

$$\mathcal{R}_k'' + 2\frac{z'}{z}\mathcal{R}_k' + k^2\mathcal{R}_k = 0, \quad (24)$$

$$\frac{z'}{z} = aH(1 + \epsilon - \eta). \quad (25)$$

В последнем равенстве использованы параметры [59]

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{4\pi}{m_{Pl}^2} \frac{\dot{\phi}^2}{H^2}, \quad \eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \quad (26)$$

Если во время инфляции  $\epsilon$  и  $\eta$  малы по сравнению с единицей, применимо приближение “медленного скатывания”: в этом случае членами с  $\ddot{\phi}$  в (15) и  $\dot{\phi}^2$  в (16) можно пренебречь и вся система уравнений легко решается.

В приближении “медленного скатывания”, спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  дается простым соотношением [60]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{1/2}(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{H^2}{|\dot{\phi}|} \Big|_{k=aH} = \frac{H}{m_{Pl}\sqrt{\pi\epsilon}} \Big|_{k=aH}, \quad (27)$$

которое можно легко получить, полагая  $u_k = 1/\sqrt{2k}$  в момент  $k = aH$ . С точностью до членов первого порядка, результат Стюарта и Люта [61] выглядит так:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{1/2}(k) = [1 - (2C + 1)\epsilon + C\eta] \frac{1}{2\pi} \frac{H^2}{|\dot{\phi}|} \Big|_{k=aH} ; \quad C \approx -0.73 . \quad (28)$$

Имеются и еще более точные формулы [62], использующие параметры более высокого порядка, чем  $\epsilon$  и  $\eta$ .

Хорошо известно, что в случаях, когда имеются сильные отклонения от режима “медленного скатывания”, эволюция возмущений на масштабах, больших размера горизонта, может оказаться нетривиальной, и привести к появлению особенностей в спектре  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  [63, 30, 31, 64, 65]. Это означает, что предсказания приблизительных формул, предполагающих, что асимптотический режим эволюции возмущений полностью достигается уже к моменту выхода флуктуации за горизонт, становятся ненадежными.

В таких случаях необходимо численное решение уравнений (20) или (24) для возмущений, с использованием начального условия (21) в режиме эволюции под горизонтом. Оказывается удобным перейти к независимой переменной  $t$ , в результате чего уравнение для  $\mathcal{R}_k$  принимает вид

$$\ddot{\mathcal{R}}_k + H\dot{\mathcal{R}}_k(3 + 2\epsilon - 2\eta) + \frac{k^2}{a^2}\mathcal{R}_k = 0 . \quad (29)$$

Мы начинаем численное решение последнего уравнения при  $k = N_{\text{und}} \cdot aH$ , где  $N_{\text{und}} \gtrsim 100$ , и продолжаем его до режима  $k \ll aH$ , где  $\mathcal{R}_k$  выходит на константу (либо до конца инфляции). Было проверено, что увеличение  $N_{\text{und}}$  не оказывает влияния на окончательный результат, так же как произвольный выбор фазы в начальном условии (21).

## 1.2 Примеры спектров возмущений кривизны с пиками

### 1.2.1 Двугорбый потенциал

Первый пример, который мы рассмотрим - двугорбый потенциал, имеющий форму (см. рис. 1), задаваемую двумя параметрами

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2. \quad (30)$$

Такой потенциал, имеющий нестабильный локальный максимум в нуле, активно изучался в связи с моделями “вечной” и “новой” инфляции. Основной проблемой была реализация начального условия, при котором инфлатон начинает свою эволюцию с этого максимума при  $\phi = 0$ .

В работе [32] было предложено, что потенциал (30) может привести к двухстадийной инфляции, которая начинается как хаотическая (с начальным значением поля  $\phi_{\text{in}} \gtrsim 5m_{Pl}$ ), но динамика поля приводит систему к состоянию с  $\phi \approx 0$  и началу второй, “новой” фазы инфляционного расширения. Во время перехода между фазами инфляции, условия “медленного скатывания”, вообще говоря, нарушаются, и требуется численный расчет спектра скалярных возмущений. (Интересно, что оценки на основе приближения “медленного скатывания”, сделанные для потенциала (30) в работе [32], привели к выводу, что этот потенциал не годится как возможный источник больших значений  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  и, соответственно, ПЧД.)

Параметр потенциала  $\lambda \sim 10^{-13}$  фиксируется наблюдениями на больших масштабах (им соответствует первая, “хаотическая” фаза инфляции). Характер эволюции системы вблизи  $\phi = 0$  и возможный переход ко второй

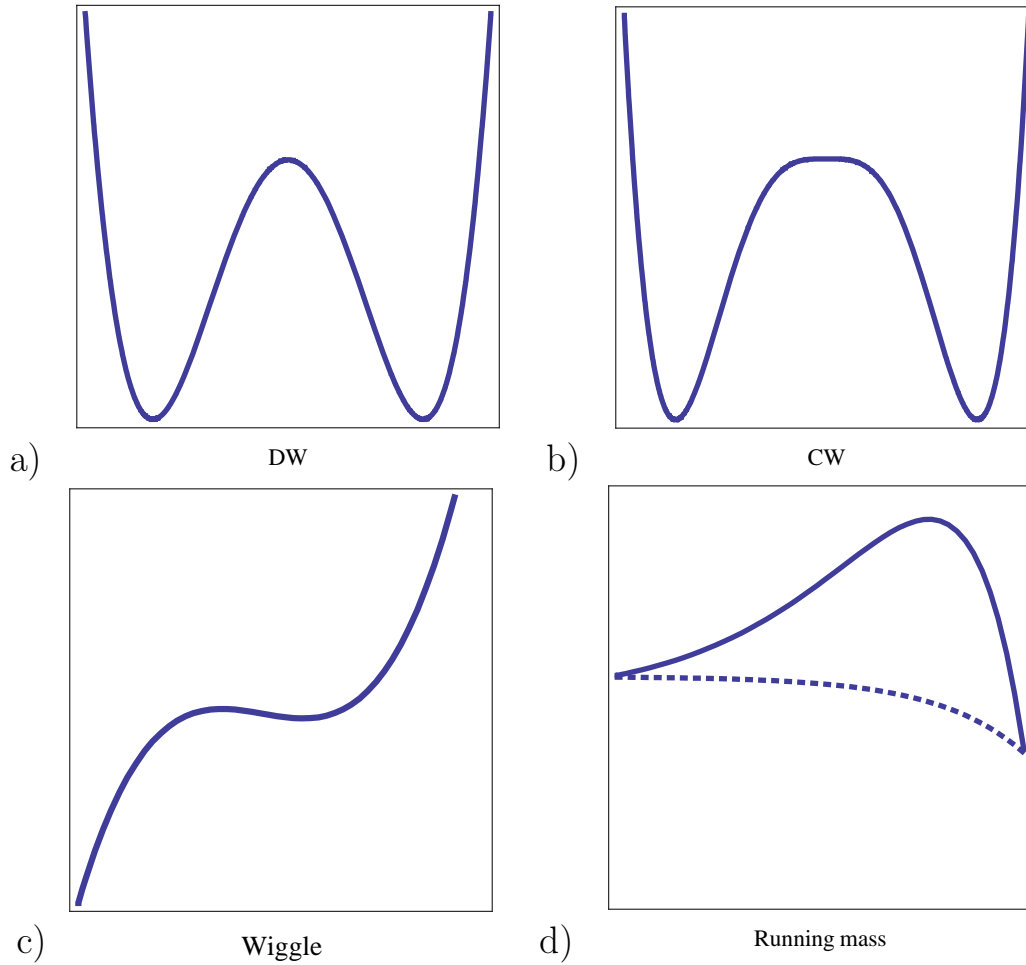


Рис. 1: Формы потенциалов, рассматриваемых в данной работе: а) двугор-  
 бый потенциал; б) потенциал Коулмена-Вайнберга; в) “крученный” потен-  
 циал; д) потенциал модели с “бегущей массой”.

фазе зависят от параметра  $v$ . Путем тонкой подгонки  $v$ , можно достичь режима, когда инфлатон проводит заметное время вблизи вершины, после чего сваливается в один из минимумов.

На рисунках 2 и 3а показана временная эволюция поля  $\phi$  и параметра  $\epsilon$ , для конкретного выбора  $\lambda$  и  $v$ . Видно, что в течение некоторого периода времени, действительно,  $\phi \approx 0$ , и, что важно, в момент перехода от ска-

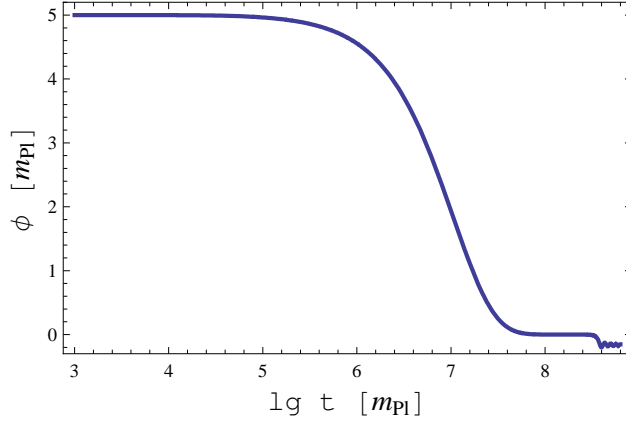


Рис. 2: Решение фонового уравнения для инфляции с двугорбым потенциалом (30). Параметры потенциала:  $v = 0.16286748m_{Pl}$ ,  $\lambda = 1.7 \times 10^{-13}$ .

тывания к временному нахождению на вершине потенциала нарушается условие “медленного скатывания” ( $\epsilon \sim 1$ ).

В работе [64] было показано, что решения уравнения (24) примерно постоянны при  $k < aH$  (т.е. за горизонтом) в случае, если коэффициент “трения”,  $z'/z$ , не меняет знака вблизи момента пересечения горизонта данной модой  $k$ . В противном случае, т.е. если смена знака происходит, член, учитывающий “трение”, оказывает усиливающее влияние на моды, покидающие горизонт в это время. Здесь мы проводим анализ особенностей спектров, следуя в основном методам работы [64].

В соответствии с уравнением (25),  $z'/z$  пропорционально  $1 + \epsilon - \eta$  и величине сопутствующего хаббловского волнового числа  $aH$ . Временные зависимости этих функций показаны на рисунке 3b. Видно, что замедление темпа расширения коррелирует с изменением знака  $1 + \epsilon - \eta$ .

Временная эволюция величины  $\mathcal{R}_k$  для некоторых  $k$  показана на рисунке 4. Видно, что возмущения  $\mathcal{R}_k(t)$  для разных  $k$  замерзают при суще-

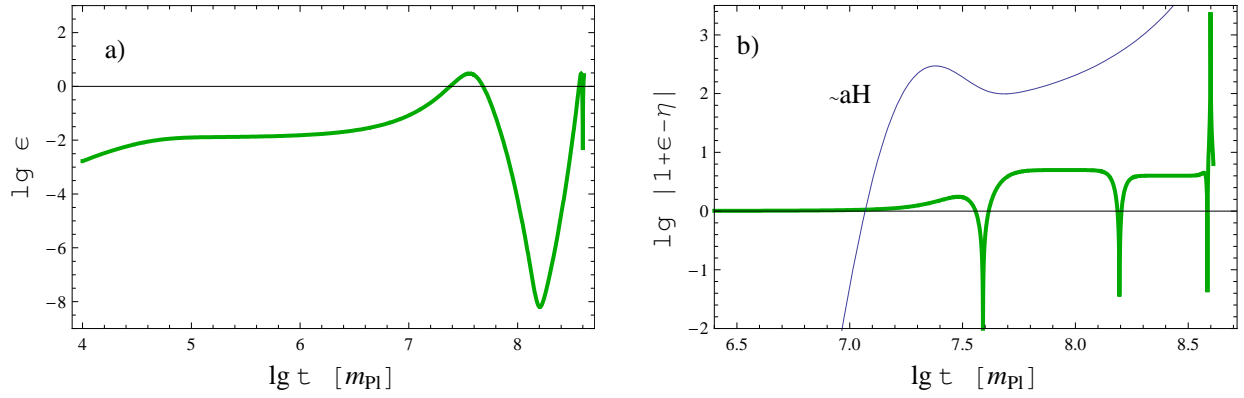


Рис. 3: Временная зависимость параметра  $\epsilon$  и комбинации  $1 + \epsilon - \eta$ , соответствующие фоновой эволюции поля, показанной на рис. 2.

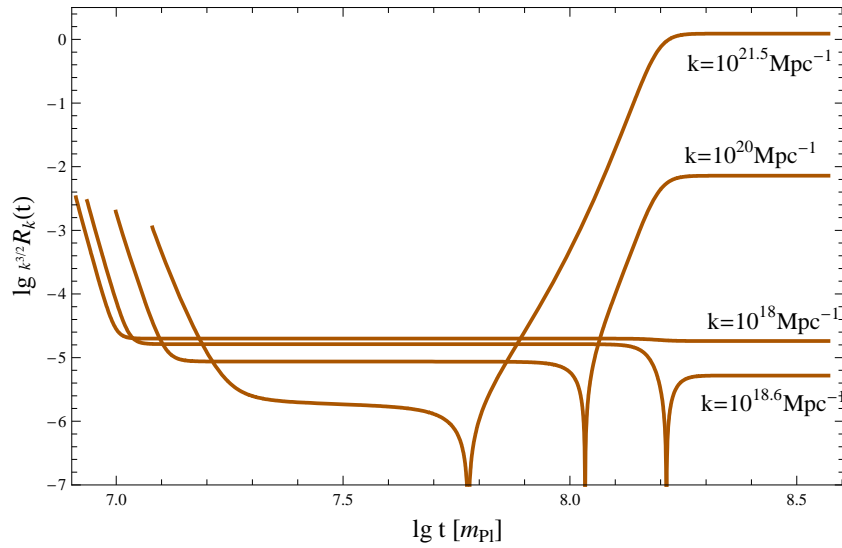


Рис. 4: Временная эволюция возмущений кривизны  $\mathcal{R}_k(t)$  для нескольких значений  $k$  во время инфляции с потенциалом (30). Параметры потенциала - те же, что и для рис. 2.

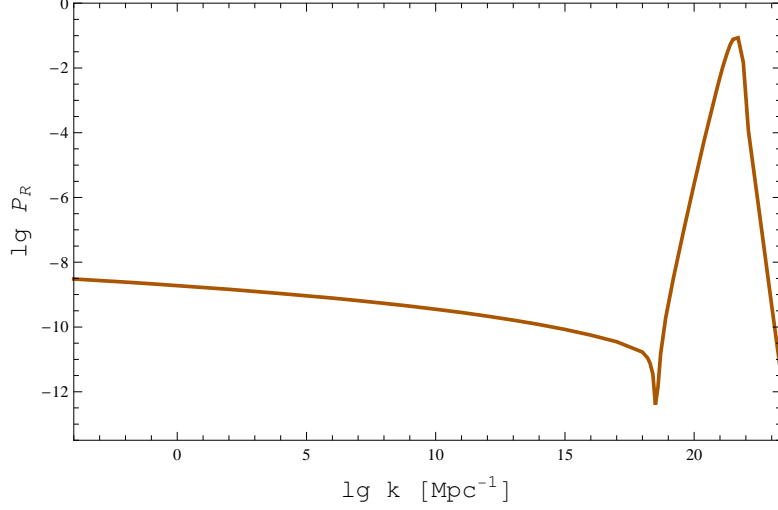


Рис. 5: Результат численного расчета спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для модели с двугорбым потенциалом. Параметры потенциала - те же, что и для рис. 2.

ственно разных значениях  $\mathcal{R}_k$ , а максимальные значения спектра достигаются для мод, пересекающих горизонт вблизи момента, когда меняется знак  $1 + \epsilon - \eta$  (т. е., около  $\lg(t/m_{Pl}) \approx 7.5$ ). Это связано с экспоненциальным ростом усиливающего члена с отрицательным “трением”, который оказывается наиболее эффективным именно для этих волновых чисел, что и приводит к характерному пику в спектре  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ , показанному на рисунке 5.

Расчет для зависимости  $\mathcal{R}_k(t)$  был проведен до момента конца инфляции, и вычисленные значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  также соответствуют этому моменту времени. Температуру послеинфляционного разогрева (рехитинга) оценим приближенно из параметров потенциала как  $\sim (\lambda v^4)^{1/4} \sim 10^{14}$  ГэВ. Масса горизонта в момент начала радиационной эпохи тогда

$$M_{hi} \sim 10^{17} \text{g} \left( \frac{10^7 \text{GeV}}{T_{RH}} \right)^2 \sim 10^3 \text{g}, \quad (31)$$

а максимальное волновое число в спектре возмущений

$$k_{\text{end}} = a_{\text{eq}} H_{\text{eq}} \left( \frac{M_{\text{eq}}}{M_{hi}} \right)^{1/2} \sim 10^{23} \text{ Мpc}^{-1}. \quad (32)$$

Наличие высокого пика в спектре говорит о возможности рождения ПЧД с массами порядка массы горизонта, соответствующей масштабу пика,

$$M_{BH} \approx M_h = M_e \left( \frac{k_e}{k_{\text{peak}}} \right)^2, \quad (33)$$

причем в случае рис. 4,  $k_{\text{end}}/k_{\text{peak}} \sim 10^2$ , так что  $M_{BH} \sim 10^7$  г. Хотя такие ПЧД испарились еще до начала эпохи нуклеосинтеза, это не исключает возможности зарегистрировать их наблюдательные проявления (например, по фону высокочастотных ГВ от их хокинговского испарения [44, 129]).

На рис. 6 показан спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  в разные моменты времени: в момент конца инфляции (т.е. то же, что на рис. 4b) и пересечения горизонта каждой модой (в этом случае получающийся пик при больших  $k$  обусловлен тем, что  $\mathcal{R}_k(t)$  не успевает выйти на постоянное значение). На том же рис. 6 показан результат расчета по формуле (27). Видно, что приближение “медленного скатывания” слишком грубо для описания возмущений около конца инфляции. Этот вывод согласуется с общими утверждениями работы [64].

### 1.2.2 Потенциал Коулмена-Вайнберга

Потенциал Коулмена-Вайнберга [66] имеет следующую форму:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^4 \left( \ln \left| \frac{\phi}{v} \right| - \frac{1}{4} \right) + \frac{\lambda}{16} v^4. \quad (34)$$



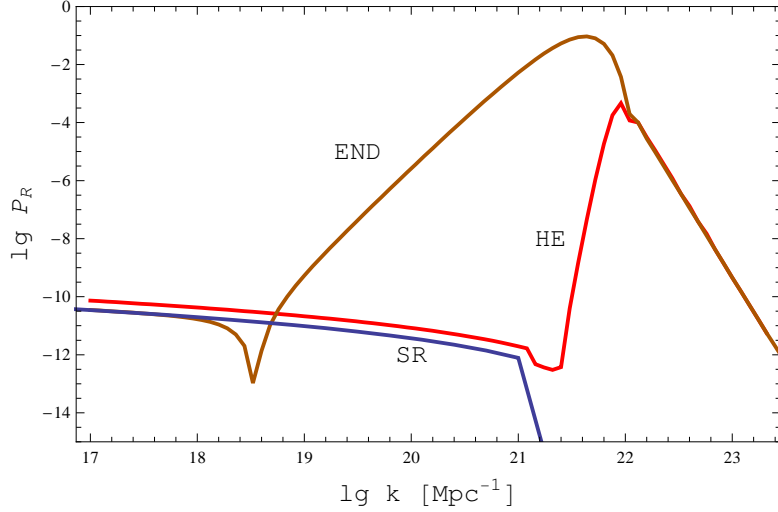


Рис. 6: Результат численного расчета спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для модели с двугорбым потенциалом (параметры потенциала - те же, что и для рис. 2). Кривая “END” - расчет для момента конца инфляции, “HE” -  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  показан в момент пересечения горизонта ( $k = aH$ ), “SR” - расчет в приближении “медленного скатывания”.

Он похож на двугорбый потенциал предыдущего раздела (см. рис. 1); наиболее существенное отличие для нас - поведение потенциала около  $\phi = 0$ ,  $V \sim A + B\phi^4 \ln(\phi/v)$ , т.е. потенциал более плоский, чем в предыдущем случае. Это приводит к большему числу е-фолдингов “новой” инфляции [32], а значит, пики в спектре возмущений кривизны (возникающие, как и в предыдущем случае, из-за временного прерывания инфляции) оказываются при меньших значениях  $k$ .

На рисунке 7 показаны два примера расчетов спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для инфляции с потенциалом (34). Как и раньше, пики достаточно четкие, хотя их амплитуда, для данных конкретных значений параметров, оказывается меньше необходимой для рождения существенного количества ПЧД. Как

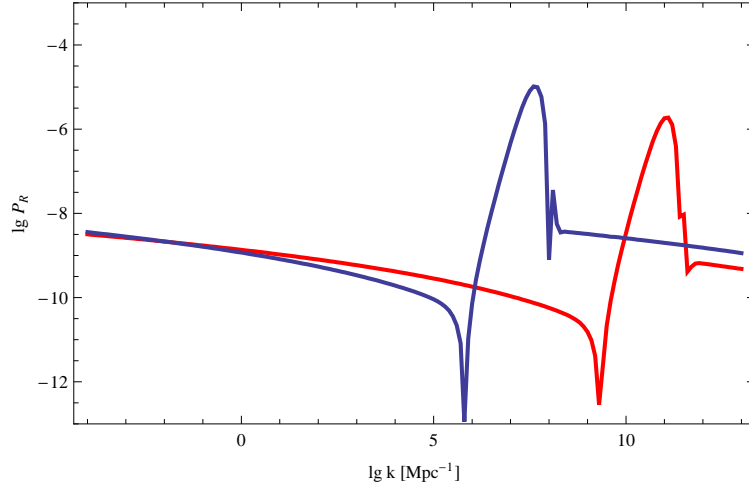


Рис. 7: Результат численного расчета спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для модели с потенциалом Коулмена-Вайнберга (34), для двух наборов параметров. Левый пик соответствует  $v = 1.113M_P$ ,  $\lambda = 5.5 \times 10^{-13}$ . Для правого пика,  $v = 1.112M_P$ ,  $\lambda = 2.4 \times 10^{-13}$ .

мы увидим далее в работе (в Главе 3), это не исключает принципиальной возможности наблюдать такие пики при больших  $k$ .

В недавней работе [67], посвященной исключительно расчетам спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для потенциала Коулмена-Вайнберга, было показано прямым расчетом, что тончайшей подгонкой параметра  $v$  можно достичь режима инфляции, при котором инфлатон несколько раз “перекатывается” из одного минимума потенциала в другой перед тем как начинается фаза “новой” инфляции (при значении поля вблизи нуля). Интересно, что в этом случае пики в спектре получаются выше ( $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim 10^{-2}$ ), что обеспечивает рождение существенного количества ПЧД.

Подчеркнем еще раз, что выводы о существовании пиков в спектре, возникающих в результате нарушения “медленного скатывания” и аномально-

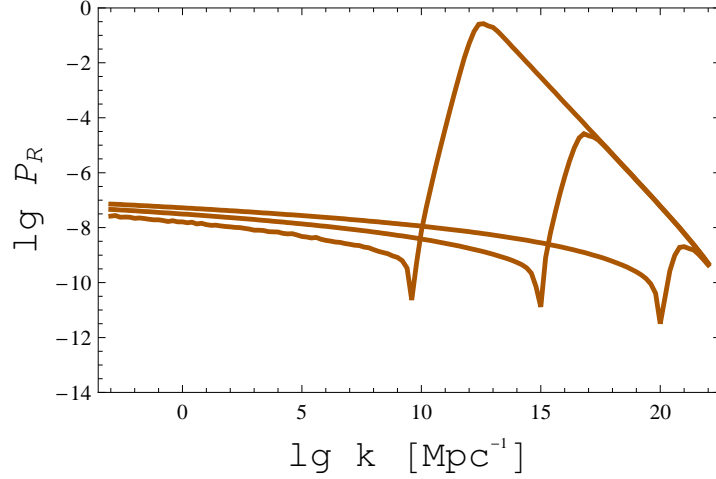


Рис. 8: Результат расчета спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для модели с “крученым” потенциалом. Использован следующий набор параметров:  $A = 136.717$ ;  $\lambda = 5 \times 10^{-14}$ ; для пиков сверху вниз,  $B = 0.11155$ ;  $B = 0.111$ ;  $B = 0.05$ .

го усиления флуктуаций, получаются в результате точного численного решения уравнений для возмущений. Рассмотрение на основе приближенных формул, отбрасывающих некоторые члены, опасно: оно может приводить к неверным выводам. Так, в работе [32] потенциал Коулмена-Вайнберга был также, как и (30) отброшен как не годящийся для “производства” ПЧД. Численные расчеты, проведенные тем же автором с соавторами через 10 лет [67], позволили “реабилитировать” этот потенциал.

### 1.2.3 “Крученный” потенциал

Потенциал, предложенный в работе [31], имеет изгиб, который при надлежащем подборе параметров приводит к замедлению темпа инфляции и нарушению “медленного скатывания”:

$$V(\phi) = \lambda(1 + A\phi^3 - B\phi). \quad (35)$$

Результаты расчета спектра возмущений кривизны для данного потенциала показаны на рисунке 8. Механизм возникновения выброса в спектре такой же, как в ранее рассмотренных примерах.

Общий практический вывод, который можно сделать на основе рассмотрения этого и ранее изученных потенциалов - такой: чем выше пик (выброс) в спектре, тем больше времени должна система провести в области изгиба или локального максимума потенциала, и тем более тонкая подгонка его параметров требуется.

Хотя такой вывод и указывает на некоторую неестественность моделей данного класса, сам по себе механизм образования пиков представляет большой интерес. Далее в работе мы будем предполагать, что образование пика на некотором масштабе  $k$  возможно, и получим ограничения на его допустимые параметры.

Из необходимости тонкой подгонки параметров потенциала в данном классе моделей также не следует делать вывода о малой вероятности существования ПЧД. Далее будет рассмотрена конкретная инфляционная модель (модель с “бегущей массой”), имеющая серьезную теоретическую мотивацию, в которой рождение ПЧД оказывается вполне естественным именно с точки зрения выбора параметров потенциала. Кроме того, если заранее никак не ограничивать себя предположениями о форме  $V(\phi)$ , большие значения спектра скалярных возмущений можно получить и в моделях без нарушений “медленного скатывания” [68, 38].

## 1.3 Инфляционная модель с “бегущей массой”

### 1.3.1 Описание модели

В этом разделе мы рассмотрим более детально одну из инфляционных моделей, предсказывающую достаточно сильную зависимость спектра скалярных возмущений от масштаба. Это модель, предполагающая потенциал поля инфлатона с “бегущей” массой (далее - БМ), предложенная Стюартом [40, 41]. Модель БМ ранее рассматривалась во многих работах, в т.ч. [69, 70, 71, 72, 73].

В моделях с мягко нарушенной глобальной суперсимметрией, с учетом квантовых поправок, потенциал может быть записан в виде

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m^2(\ln \phi)\phi^2, \quad (36)$$

причем зависимость массы  $m$  от масштаба перенормировки  $\phi$  определяется уравнением ренормгруппы.

В теориях супергравитации инфляционный потенциал имеет порядок  $M_{\text{inf}}^4$ , где  $M_{\text{inf}}$  - масштаб нарушения суперсимметрии во время инфляции. В свою очередь, квадрат массы инфлатона (и любого другого скалярного поля) в супергравитации имеет порядок квадрата хаббловского параметра, т.е.

$$|m^2| \sim H_I^2 = \frac{V_0}{3M_P^2}. \quad (37)$$

Для простоты предположим (см. [40, 41, 70, 71]), что  $M_{\text{inf}} \sim M_s$ , где  $M_s$  - масштаб нарушения суперсимметрии в вакууме,

$$M_s \sim \sqrt{\tilde{m}_s M_P} \sim 10^{11} \text{GeV} \sim 3 \times 10^{-8} M_P \quad (38)$$

( $\tilde{m}_s$  - масштаб масс скварков и слептонов,  $\tilde{m}_s \sim 3$  ТэВ). Эти предположения позволяют оценить энергетический масштаб инфляции:

$$V_0 \sim M_s^4 \sim 10^{-30} M_P^4 \quad , \quad H_I \approx 10^{-15} M_P. \quad (39)$$

Уравнение ренормгруппы для массы инфлатона выглядит следующим образом:

$$m^2(t) = m_0^2 - A\tilde{m}_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \tilde{\alpha}_0 t)^2} \right] \quad , \quad t \equiv \ln \frac{\phi}{M_P} \quad (40)$$

(мы рассматриваем модель гибридной инфляции [70, 71] с мягко нарушенной суперсимметрией, с калибровочной группой  $SU(N)$  и малой юкавской связью  $\lambda$ ). В последнем уравнении,  $m_0^2$  и  $\tilde{m}_0^2$  - массы инфлатона и гауджино при  $\phi = M_P$ ,  $\alpha_0 = g^2/4\pi$  - константа калибровочной связи,

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{B\alpha_0}{2\pi}, \quad (41)$$

$A$  и  $B$  - положительные константы порядка единицы, разные для разных вариантов модели (даже основанных на одной и той же группе  $SU(N)$  - есть зависимость от формы суперпотенциала, частиц, входящих в супермультиплеты, и т.д.). Здесь мы используем вариант модели Кови [71], и, соответственно, полагаем  $A = 2$  и  $B = N = 2$ .

Вблизи конкретного масштаба поля  $\phi_0$  (в нашем случае,  $\phi_0$  соответствует значению поля инфлатона в момент пересечения горизонта масштабом  $k_0 \approx 0.002h$  Мпк<sup>-1</sup>), потенциал можно разложить в ряд Тейлора:

$$V(\phi) = V_0 + \frac{\phi^2}{2} \left[ m^2(\ln(\phi_0)) - c \frac{V_0}{M_P^2} \ln \frac{\phi}{\phi_0} + \dots \right]. \quad (42)$$

Здесь константа  $c$  определяется соотношением

$$c \frac{V_0}{M_P^2} = - \left. \frac{dm^2}{d \ln \phi} \right|_{\phi=\phi_0}. \quad (43)$$

В свою очередь, разложение (40) с учетом членов только первого порядка дает ( $t_0 = \ln \frac{\phi_0}{M_P}$ ):

$$m^2(t) = m^2(t_0) - 4\tilde{m}_0^2 \frac{\tilde{\alpha}_0}{(1 + \tilde{\alpha}_0 t_0)^3} \ln \frac{\phi}{\phi_0}. \quad (44)$$

Из (43) и (44) получается выражение для  $c$ :

$$c \frac{V_0}{M_P^2} = 4\tilde{m}_0^2 \frac{\tilde{\alpha}_0}{(1 + \tilde{\alpha}_0 t_0)^3}. \quad (45)$$

Если  $|m_0^2| \sim \tilde{m}_0^2 \approx H_I^2$ , то

$$c = \frac{4}{3} \frac{\tilde{\alpha}_0}{(1 + \tilde{\alpha}_0 t_0)^3}. \quad (46)$$

Оказывается (см. рис. 9b), что в нашем примере  $\phi_0 \sim 10^{-10} M_P$ , так что  $t_0 \sim \ln 10^{-10} \sim (-23)$ . Предполагая, что  $\alpha_0 \sim 1/24$  (как в моделях SUSY-GUT), получаем, что  $\tilde{\alpha}_0 \sim \frac{2}{2\pi} \frac{1}{24}$ . В этом случае,  $c \sim 4\tilde{\alpha}_0 \sim 0.06$ .

Отметим, что если оставить в разложении  $m^2(t)$  в (44) члены более высокого порядка по  $t - t_0 = \ln \frac{\phi}{\phi_0}$ , то становится видно, что на самом деле параметром разложения является  $\tilde{\alpha}_0 \ln \frac{\phi}{\phi_0}$ , а не  $\ln \frac{\phi}{\phi_0}$ . Наименьшее значение  $\phi$ ,  $\phi_{\text{end}}$ , в нашем случае порядка  $10^{-16} M_P$  (см. рис. 9b). Даже в этом случае, параметр разложения достаточно мал,

$$\tilde{\alpha}_0 \ln \frac{\phi_{\text{end}}}{\phi_0} \sim \tilde{\alpha}_0 \ln 10^{-6} \sim (-0.1). \quad (47)$$

Имея это в виду, мы будем использовать линейное приближение (уравнение (44)) во всей области значений поля инфлатона, исследуемой в данной работе.

Следуя предыдущим работам, мы также вводим удобный параметр  $s$ , определяемый соотношением

$$s = c \ln \left( \frac{\phi_*}{\phi_0} \right), \quad (48)$$

где  $\phi_*$  соответствует максимуму потенциала. Этот параметр связывает значение поля  $\phi_0$  с хаббловским параметром во время инфляции и с нормировкой спектра первичных возмущений:

$$\phi_0 s = \frac{H_I}{2\pi \mathcal{P}_{\mathcal{R}}^{1/2}(k_0)}. \quad (49)$$

В терминах  $\phi_*$  и  $s$ , в линейном приближении потенциал модели переписывается в простом виде [73]

$$V = V_0 - \frac{3}{2} c H_I^2 \phi^2 \left[ \ln \left( \frac{\phi}{\phi_*} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (50)$$

Предполагается [71], что окончание инфляционной стадии в модели БМ происходит за счет гибридного механизма при некотором критическом значении поля  $\phi = \phi_{\text{cr}}$ . Это значение определяется величиной юкавской константы связи  $\lambda$  (несмотря на то, что  $\lambda^2 \ll \alpha$ ). Кроме того, можно говорить о конце периода “медленного скатывания”, при  $\phi = \phi_{\text{end}}$ , когда достигается значение параметра  $\eta = 1$ . Значение  $\phi_{\text{end}}$  получается в прямом вычислении; можно проверить [71], что значение  $\lambda$  всегда может быть выбрано так, что “медленное скатывание” заканчивается до того, как достигается величина  $\phi_{\text{cr}}$ .

### 1.3.2 Расчет спектра скалярных возмущений

Анализ данных по анизотропии реликтового излучения [6] с учетом других типов наблюдений [74] показывает, что, во-первых, спектральный индекс  $n(k) \equiv 1 + d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) / d \ln k$  на космологических масштабах (при  $k_0 \approx 0.002 \text{ Мпк}^{-1}$ ) несколько меньше единицы,

$$n_0 = 0.963_{-0.015}^{+0.014} \quad (51)$$



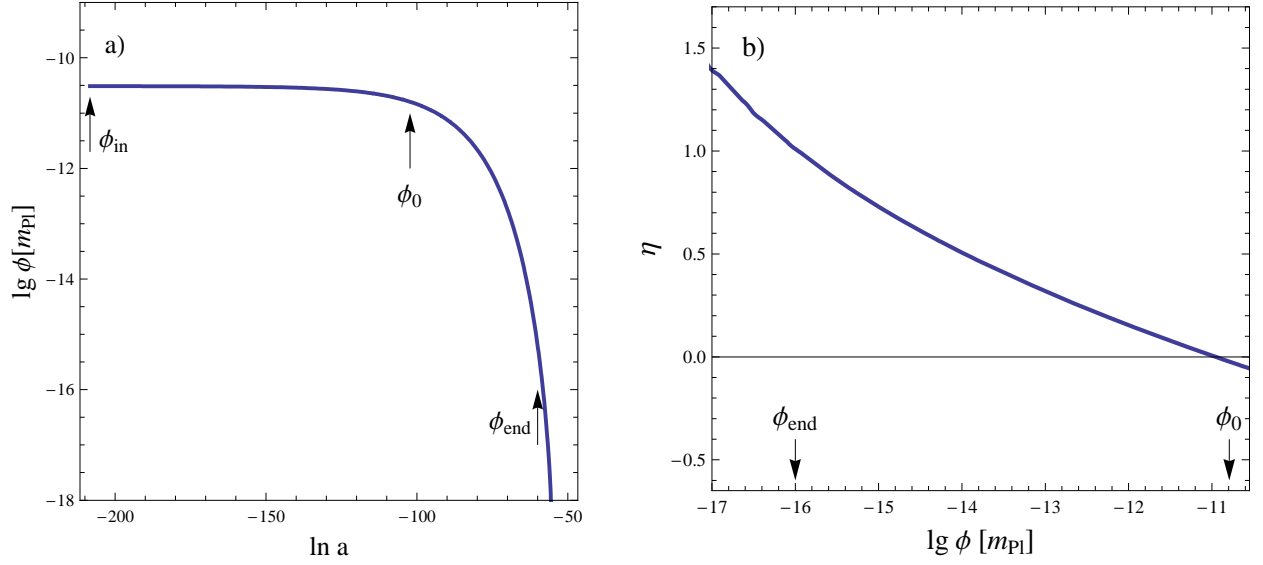


Рис. 9: *a)* Эволюция поля инфлатона  $\phi(\ln a)$  в модели БМ. *b)* Зависимость параметра  $\eta$  от значения поля  $\phi$ . Для обоих рисунков,  $H_I = 10^{-15} M_P$ ,  $c = 0.062$ ,  $s = 0.040$ .

(данные 5-летнего измерения WMAP, [6]); во-вторых,  $n'_0 \equiv dn/d \ln k|_{k=k_0} \lesssim 0.01$ . Приблизненно, связь  $n_0$  и  $n'_0$  с параметрами  $s$  и  $c$  модели БМ дается в виде

$$n_0 - 1 \approx 2(s - c) \quad , \quad n'_0 \approx 2sc \quad . \quad (52)$$

Если, как мы оценили выше,  $c \approx 0.06$ , то из значения  $n_0$  получается  $s \approx 0.04$ , а ожидаемое значение для  $n'_0 \approx 0.005$ , что находится в области, разрешенной наблюдениями. Далее мы покажем, что даже такого малого  $n'_0$  на космологических масштабах достаточно, чтобы спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  достиг достаточно больших значений при больших  $k$ .

Для конкретного численного расчета в этой главе, были выбраны следующие значения параметров:

$$c = 0.062 \quad , \quad s = 0.040. \quad (53)$$

На космологических масштабах, они соответствуют

$$\epsilon \approx \frac{s\phi_0^2}{M_P^2} \sim 10^{-21} \quad ; \quad \eta \approx s - c \sim (-0.02) \quad , \quad (54)$$

что также согласуется с существующими данными эксперимента [75]. Ближе к концу инфляции, как мы увидим,  $\eta \sim 1$  ( $\epsilon$  всегда много меньше единицы в этой модели); поэтому мы проводим вычисление спектра скалярных возмущений численно с целью сравнить результат с имеющимися приближенными формулами - а именно, с формулой

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_0)} = \exp \left[ \frac{2s}{c} \left( e^{c\Delta N(k)} - 1 \right) - 2c\Delta N(k) \right] \quad ; \quad \Delta N(k) \equiv \ln \frac{k}{k_0} \quad , \quad (55)$$

которая получается из простейшего приближения (27), и с формулой Стюарта - Люта (28).

Результаты расчетов представлены на рисунках 9 и 10. На рисунке 9 показана эволюция поля  $\phi$  с изменением масштабного фактора и рост параметра  $\eta$  с изменением значения поля от  $\phi_0$  до  $\phi_{\text{end}}$ . Спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  показан на рисунке 10 для широкого интервала сопутствующих волновых чисел. Хорошо видно, что вблизи конца инфляции ( $\phi \sim \phi_{\text{end}}$ ,  $k \sim k_{\text{end}} \sim 3 \times 10^{16} \text{ Мпк}^{-1}$ ), приближенные формулы, основанные на приближении “медленного скатывания”, не точны: они сильно недооценивают значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ .

### 1.3.3 Эффекты квантовой диффузии

Мы провели расчет спектров скалярных возмущений в терминах классических траекторий скалярного поля в фазовом пространстве, сопоставляя, в частности, определенные значения поля с конкретным числом  $e$ -

фолдингов до конца инфляции. Такое описание становится неприменимым в случае, если квантовая диффузия разрушает классическую картину эволюции поля - в этом случае необходимо использование методов стохастической инфляции. Этот подход использует “крупнозернистое” поле  $\varphi$ , являющееся пространственным средним  $\phi$  по физическому объему размера, значительно превышающего хаббловский размер  $H^{-1}$ .

В приближении “медленного скатывания”, эволюция поля  $\varphi$  определяется (в первом порядке) уравнением Ланжевеновского типа [76, 77, 78, 79]

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{3H} V'(\varphi) = \frac{H^{3/2}}{2\pi} \xi(t), \quad (56)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (57)$$

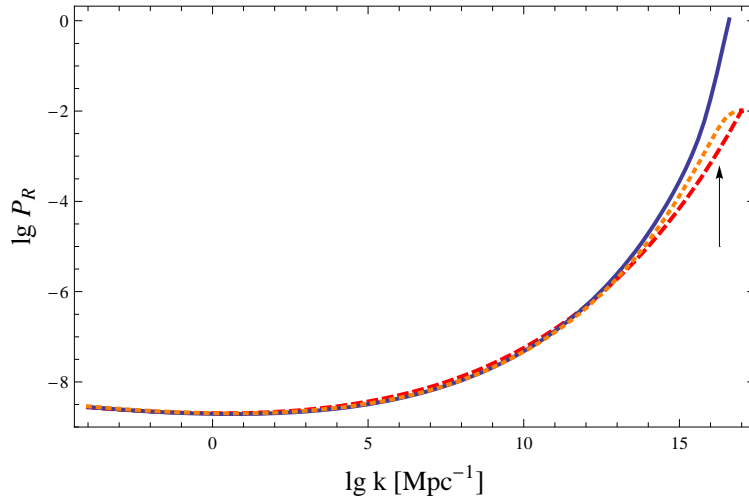


Рис. 10: Спектр мощности  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  в модели БМ, рассчитанный численно (сплошная линия), по приближенной аналитической формуле (55) (длинный пунктир) и с использованием формулы Стюарта-Люта (короткий пунктир). Использованы те же параметры потенциала, что и на рис. 9. Стрелкой показано значение  $k_{\text{end}}$ .

Здесь  $\xi(t)$  - поле случайного шума, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю. Член  $\frac{1}{3H}V'(\varphi)$  определяет детерминистичную эволюцию  $\varphi$ , в отсутствие шумового члена  $\frac{H^{3/2}}{2\pi}\xi(t)$ ; в этом случае, решение (56) - конкретная траектория  $\varphi_{\text{sr}}(t)$ .

Переходя к конечным приращениям по времени в уравнении (56), коэффициент  $\frac{H^{3/2}}{2\pi}$  может быть переписан как  $\sqrt{\frac{H^3}{4\pi^2\Delta t}}$ , а эволюция  $\varphi$  на масштабах времени  $\Delta t \geq H^{-1}$  может быть описана как

$$\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = -\frac{1}{3H}V'(\varphi)\Delta t + \frac{1}{2\pi}\sqrt{H^3\Delta t}\xi(t). \quad (58)$$

Условие детерминистичности эволюции (см., например, [80])

$$\frac{1}{3H}|V'(\varphi)|\Delta t \gg \frac{1}{2\pi}\sqrt{H^3\Delta t}, \quad \Delta t = H^{-1}. \quad (59)$$

Используя связь между  $V$  и  $H$  (в приближении “медленного скатывания”), получаем,

$$|V'(\varphi)| \gg \frac{3}{2\pi}H^3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}V^{3/2}(\varphi). \quad (60)$$

В подходе работы [81], крупнозернистое поле рассматривается как возмущение классического решения  $\varphi_{\text{cl}}$  (которое является решением уравнения Ланжевена с нулевой шумовой частью),

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{cl}}(t) + \delta\varphi_1(t) + \delta\varphi_2(t) + \dots \quad (61)$$

Здесь член  $\delta\varphi_i(t)$  зависит от шума в  $i$ -м порядке. Предполагается также, что хаббловский параметр в уравнении Ланжевена зависит только от крупнозернистого поля  $\varphi$ ,

$$H^2(\varphi) = \frac{1}{3M_P^2}V(\varphi). \quad (62)$$

Соответственно, можно разложить

$$H(\varphi) = H_{\text{cl}} + H'_{\text{cl}}(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) + \frac{H''_{\text{cl}}}{2}\delta\varphi_1^2 + \dots, \quad (63)$$

$$H_{\text{cl}} = H(\varphi_{\text{cl}}) = \sqrt{\frac{V(\varphi_{\text{cl}})}{3M_P^2}}. \quad (64)$$

Такой подход позволяет рассчитать среднее значение полного числа е-фолдингов  $\langle N \rangle$ , и сравнить его с соответствующим “классическим” значением,

$$N_T^{\text{cl}} = -\frac{1}{2M_P^2} \int_{\varphi_{\text{in}}}^{\varphi_{\text{end}}} d\varphi_{\text{cl}} \frac{H_{\text{cl}}}{H'_{\text{cl}}} = \frac{1}{M_P^2} \int_{\varphi_{\text{end}}}^{\varphi_{\text{in}}} d\varphi_{\text{cl}} \left( \frac{V}{V'} \right); \quad (65)$$

$$\delta N_T = \langle N_T \rangle - N_T^{\text{cl}} = -\frac{1}{2M_P^2} \int_{\varphi_{\text{in}}}^{\varphi_{\text{end}}} \left[ \langle \delta\varphi_2 \rangle + \frac{H''_{\text{cl}}}{2H'_{\text{cl}}} \langle \delta\varphi_1^2 \rangle \right] d\varphi_{\text{cl}}. \quad (66)$$

Кроме того, можно рассчитать среднее значение гауссового распределения вероятностей для поля  $\varphi$  и проанализировать, как оно меняется в зависимости от текущего значения поля.

Интервал значений поля, для которого выполняется неравенство (60), и, следовательно, доминирует детерминистичная эволюция, показан на рисунке 11a,b. Переменная  $x$  на рис. 11b определена соотношением

$$\frac{\varphi_{\text{in}}}{\varphi_*} = 1 - 10^{-x} \quad (67)$$

( $\varphi_*$ , как и ранее, соответствует точке максимума  $V(\varphi)$ ). Из рисунков видно, что ограничения на значение поля из требования детерминистической эволюции не слишком строги:

$$3 \times 10^{-19} M_P \lesssim \varphi \lesssim \varphi_* - 10^{-7} \varphi_*. \quad (68)$$

Точность разложения (61) для потенциалов мономиальной формы в моделях стохастической инфляции изучалась в работе [82]. Здесь мы изучим точность этого разложения для потенциала модели с “бегущей массой”, используя при анализе параметры  $V_0$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $\varphi_{\text{end}}$ , полученные выше. Результаты расчета  $\langle \delta\varphi_1^2 \rangle$  и  $\langle \delta\varphi_2 \rangle$  показаны на рисунке 12. Из него видно, что разложение в ряд по степеням теории возмущений хорошо работает, если

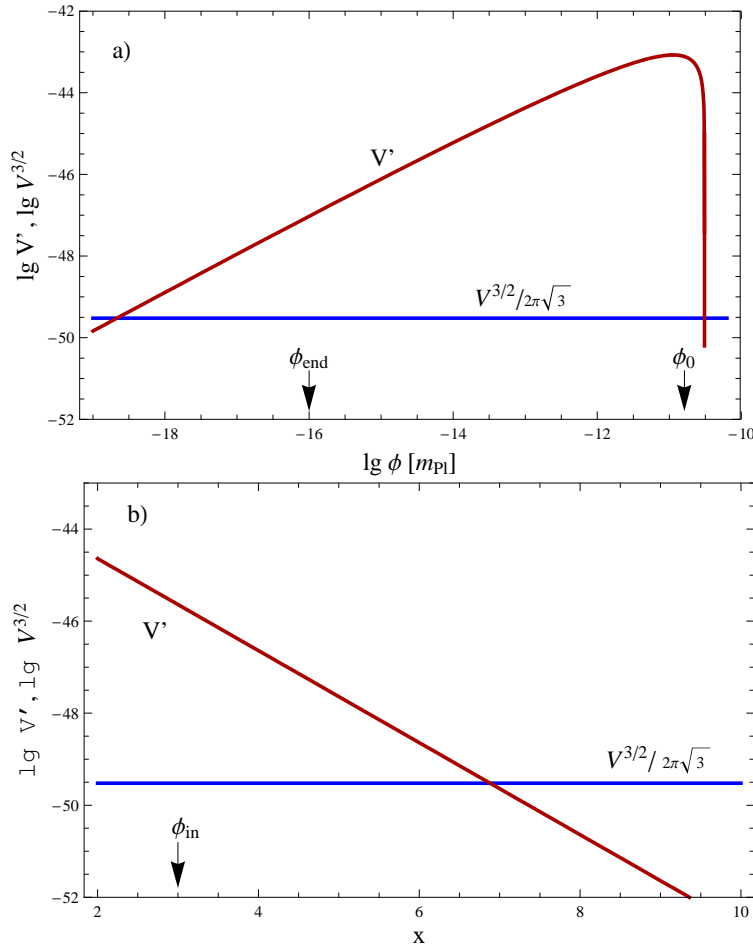


Рис. 11: *a)* Сравнение  $V'$  и  $V^{3/2}$  для модели БМ (см. уравнение (60)). *b)* Тот же график в другом масштабе: переменная  $x$  связана со значением поля соотношением  $\varphi = (1 - 10^{-x})\varphi_*$ .

начальное значение поля инфлатона,  $\varphi_{\text{in}}$ , выбрано не слишком близко к значению  $\varphi$  в максимуме потенциала. Точнее, параметр  $x$ , определенный равенством (67), должен быть меньше, чем  $4 - 4.5$ . Начальное значение поля  $\varphi_{\text{in}}$  соответствует началу эволюции, т.е.,  $\delta\varphi_1(t_{\text{in}}) = \delta\varphi_2(t_{\text{in}}) = 0$ .

Если эволюция системы действительно детерминистична, поправка к классическому числу е-фолдингов  $N_T^{\text{cl}}$ , даваемая (66), должна быть мала. Чтобы аналитически оценить верхний предел этой поправки, мы использовали выражения для  $\langle\delta\varphi_1^2\rangle$  и  $\langle\delta\varphi_2\rangle$ , полученные в [81], оставляя в них только лидирующие члены. В соответствии с этими выражениями, верны следующие соотношения:

$$\langle\delta\varphi_2\rangle < \left(\frac{V_0}{M_P}\right)^4 \left(\frac{M_P}{\varphi_{\text{in}}}\right)^2 \frac{1}{\ln^2 \frac{\varphi_{\text{in}}}{\varphi_*}} \frac{\varphi}{M_P} \lesssim 10^{-10+2x} \varphi, \quad (69)$$

$$\langle\delta\varphi_1^2\rangle < \left(\frac{V_0}{M_P}\right)^4 \frac{1}{\ln^2 \frac{\varphi_{\text{in}}}{\varphi_*}} \sim 10^{-30+2x} M_P^2. \quad (70)$$

Используя эти верхние пределы, можно оценить соответствующие верхние пределы двух интегралов в выражении для  $\delta N_T$  (66). Результат имеет вид:

$$\frac{1}{M_P^2} \int_{\varphi_{\text{end}}}^{\varphi_{\text{in}}} \langle\delta\varphi_2\rangle d\varphi_{\text{cl}} < 10^{-30+2x}; \quad (71)$$

$$\frac{1}{M_P^2} \int_{\varphi_{\text{end}}}^{\varphi_{\text{in}}} \frac{\langle\delta\varphi_1^2\rangle H''_{\text{cl}}}{H'_{\text{cl}}} d\varphi_{\text{cl}} < 10^{-30+3x}. \quad (72)$$

Из двух последних неравенств видно, что квантовые поправки к  $\delta N_T$  количественно малы даже если значение  $x$  около 10. Но только для  $x < (4 - 4.5)$ , когда разложение в ряд (61) допустимо, можно действительно

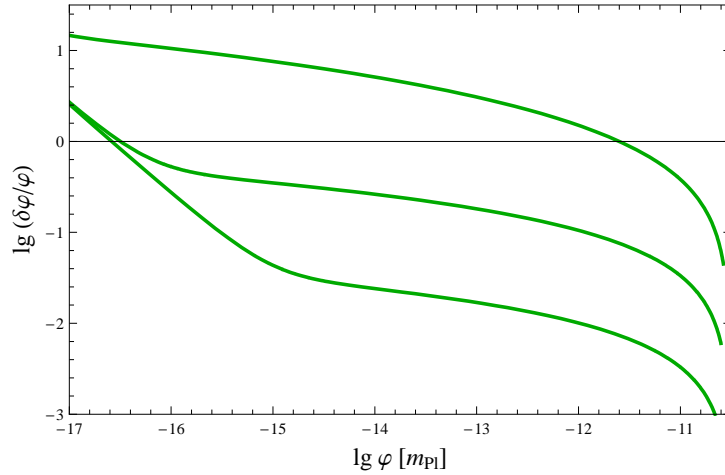


Рис. 12: Результат расчета  $\delta\varphi/\varphi$  для разных значений  $\varphi_{\text{in}} = \varphi_*(1 - 10^{-x})$ . Снизу вверх,  $x$  равен 3, 4, 5. Здесь  $\delta\varphi \equiv \sqrt{\langle\delta\varphi_1^2\rangle} + \langle\delta\varphi_2\rangle$ .

быть уверенным что

$$\delta N_T \ll N_T^{\text{cl}}, \quad (73)$$

и эволюция системы детерминистична.

Для полноты анализа необходимо также удостовериться, что положение среднего значения функции распределения вероятностей для “крупнозернистого” поля ведет себя корректно [81]. Расчет, с учетом объемных эффектов, дает результат, представленный на рисунке 13а,б. Из него видно, что в этом случае, как и при расчете поправки к  $N_T^{\text{cl}}$ , выбор начального условия играет решающую роль; эффекты ухода среднего значения поля за максимум потенциала (возможность таких эффектов была отмечена в [81]) не проявляются, если эволюция начинается достаточно далеко от максимума потенциала ( $x \lesssim 4.5$ ). Конечно, реализация такого начального условия сама по себе является проблемой. Предположительно, необходимые начальные условия могут быть обеспечены предыдущей историей “вечной” инфляции [40, 41].



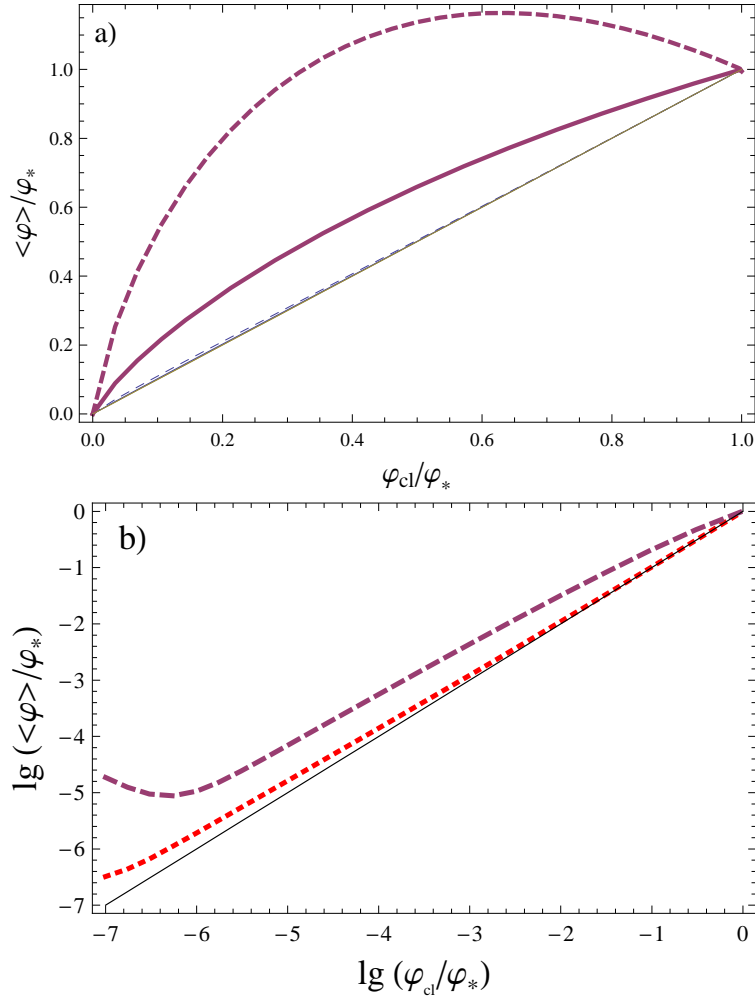


Рис. 13: Расчет стохастических эффектов для разных начальных значений поля  $\varphi_{in}$ . *a)* Тонкий пунктир:  $\varphi_{in} = (1 - 1.5 \times 10^{-5})\varphi_*$ , без учета объемных эффектов; толстый пунктир:  $\varphi_{in} = (1 - 1.5 \times 10^{-5})\varphi_*$ , с учетом объемных эффектов; сплошная толстая линия:  $\varphi_{in} = (1 - 3 \times 10^{-5})\varphi_*$ , с учетом объемных эффектов. *b)* Линии с длинным и коротким пунктиром соответствуют расчетам с учетом и без учета объемных эффектов, соответственно, для  $\varphi_{in} = (1 - 3 \times 10^{-5})\varphi_*$ .

# Глава 2. Спектры масс первичных черных дыр и ограничения на спектр первичных скаляр- ных возмущений

## 2.1 Спектр масс первичных черных дыр

### 2.1.1 Общие формулы

Основное предположение, которое используется при вычислении спектров масс ПЧД в данной работе, состоит в том, что первичные черные дыры рождаются в результате эволюции флуктуаций плотности в ранней Вселенной. Мы предполагаем, что их рождение начинается в момент времени  $t_i$ , соответствующий началу тепловой истории.

Расчет спектра масс основывается на формализме Пресса-Шехтера [24]. Поскольку мы считаем, что в момент  $t_i$  разогрев Вселенной и формирование спектра скалярных возмущений произошли практически мгновенно, то удобно рассматривать спектр масс коллапсирующих объектов (ПЧД) именно в этот момент.

Итак, пусть  $n(M)$  - распределение по массам флуктуаций  $M$  в момент  $t_i$ , то есть, по определению,

$$n(M) \equiv \frac{d^2 N}{dM dV}, \quad (74)$$

где  $dV$  - элемент физического объема, а вся масса, таким образом,

$$\int M dN = \int M n(M) dM dV = \rho_i \int dV. \quad (75)$$

Часть массы Вселенной, заключенная в коллапсирующих объектах массы больше  $M$ , равна

$$\frac{1}{\rho_i} \int_M^{\infty} M n(M) dM. \quad (76)$$

Согласно модели Пресса и Шехтера,

$$\frac{1}{\rho_i} \int_M^{\infty} M n(M) dM = P(\delta_R > \delta_c \mid M, t_i). \quad (77)$$

В правой части этой формулы стоит вероятность того, что случайно выбранная точка имеет сглаженный на масштабе  $R$  (соответствующем массе  $M$ ) контраст плотности больше  $\delta_c$ .

Обычно предполагается гауссов спектр возмущений,

$$p(\delta_R) = \frac{1}{\sigma_R(M)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2(M)}\right], \quad (78)$$

$$P(\delta_R > \delta_c) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{\delta_c}{\sigma_R(M)\sqrt{2}}\right] \quad (79)$$

(ясно, что  $P_{max} = 1/2$ ). Влияние возможных отклонений от гауссовости рассмотрено, например, в [31, 83, 67], и сейчас нами не изучается. Спектр масс получается дифференцированием по  $M$  условия (77), причем лишняя двойка в числителе учитывает тот факт, что области с плотностью меньше средней в конце концов также коллапсируют:

$$n(M) = \frac{2\rho_i}{M} \frac{\partial P}{\partial M} = \frac{2\rho_i}{M} \frac{\partial}{\partial M} \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sigma_R(M)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2(M)}\right] d\delta_R. \quad (80)$$

Дважды дифференциальное распределение (по  $M$  и  $\delta_R$ )

$$n(M, \delta_R) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_i}{M} \frac{\partial}{\partial M} \left( \frac{1}{\sigma_R(M)} \exp\left[-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2(M)}\right] \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_i}{M} \frac{1}{\sigma_R^2(M)} \frac{\partial \sigma_R(M)}{\partial M} \exp \left[ -\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2(M)} \right] \cdot \left( \frac{\delta_R^2}{\sigma_R^2(M)} - 1 \right). \quad (81)$$

На практике, нас интересует распределение по массам образующихся черных дыр  $M_{BH}$ . Переходя в последнем равенстве к переменным  $M_{BH}$  и сглаженному контрасту плотности в момент равенства размеров области и горизонта  $\delta_R^H$ , запишем окончательно основные выражения для расчета спектра масс ПЧД [25, 26, 28]:

$$n_{BH}(M_{BH})dM_{BH} = \left\{ \int n(M, \delta_R) \frac{d\delta_R}{d\delta_R^H} \frac{dM}{dM_{BH}} d\delta_R^H \right\} dM_{BH}, \quad (82)$$

$$n(M, \delta_R) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_i}{M} \frac{1}{\sigma_R^2} \left| \frac{\partial \sigma_R}{\partial M} \left( \frac{\delta_R^2}{\sigma_R^2} - 1 \right) \right| e^{-\frac{\delta_R^2}{2\sigma_R^2}}. \quad (83)$$

Дисперсия сглаженного на сопутствующем масштабе  $R$  начального (в момент  $t_i$ ) контраста плотности  $\delta_R$  равна

$$\sigma_R^2(M) = \int_0^\infty \mathcal{P}_\delta(k) W^2(kR) \frac{dk}{k}, \quad (84)$$

$\mathcal{P}_\delta(k)$  - спектр мощности возмущений плотности,  $W(kR)$  - Фурье-образ оконной функции (в этой работе мы полагаем  $W(kR) = \exp(-k^2 R^2/2)$ ),  $\rho_i$  - начальная плотность энергии.

Фурье-компонента сопутствующего контраста плотности равна

$$\delta_k(t) = -\frac{2}{3} \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \Psi_k(t), \quad (85)$$

где  $\Psi_k$  - Фурье-компонента бардиновского потенциала. В приближении  $\Psi_k = \text{const}$ , получаем, в эпоху доминирования излучения,  $\delta_k \sim a^2$ , т.е. хорошо известный результат [84]. В этой работе мы, однако, не пользуемся

данным приближением, а явно учтем временную зависимость бардиновского потенциала.

Спектр мощности возмущений плотности, в некоторый момент времени  $t$ , равен

$$\mathcal{P}_\delta(k, t) = \left[ \frac{2}{3} (k\tau)^2 \right]^2 \mathcal{P}_\Psi(k, t), \quad (86)$$

где  $\tau$  - конформное время ( $\tau = (aH)^{-1}$  в радиационную эпоху).

Масштаб  $R \equiv 1/k_R$  связан с *начальной* массой флуктуации  $M$  соотношением

$$\left( \frac{M}{M_i} \right)^{-2/3} = \frac{k_R^2}{(a_i H_i)^2}, \quad (87)$$

где  $M_i$ ,  $a_i$  и  $H_i$  - масса горизонта, масштабный фактор и хаббловский параметр в момент времени  $t_i$ . Уравнение (87) следует из двух простых формул: начальная масса горизонта (в момент  $t_i$ ) равна

$$M_i = \frac{4\pi}{3} t_i^3 \rho_i, \quad (88)$$

а масса флуктуации

$$M = \frac{4\pi}{3} \frac{a_i^3}{k_R^3} \rho_i. \quad (89)$$

Из этих соотношений получаем

$$\frac{M}{M_i} = k_R^{-3} \left( \frac{a_i}{t_i} \right)^3, \quad (90)$$

и, полагая  $H_i = 1/t_i$ , приходим к уравнению (87).

Масса горизонта в момент, когда область размера  $R$  заходит под горизонт, равна

$$M_h = \frac{4\pi}{3} (aR)^3 \rho(a) \quad (91)$$

(в этот момент,  $a/k_R = H^{-1}$ ). Используя (88), получаем

$$M_h = M_i H_i \frac{a}{k_R} = M_i \frac{(a_i H_i)^2}{k_R^2}. \quad (92)$$

Окончательно, используя (87), получаем связь между  $M_h$  и  $M$  [28]:

$$M_h = M_i^{1/3} M^{2/3}. \quad (93)$$

Это уравнение связывает массу горизонта в момент времени  $t_h$ , когда область заходит под горизонт, с начальной (в момент  $t_i$ ) массой горизонта и с начальной (в тот же момент  $t_i$ ) массой области  $M$ .

Получим еще связь между параметрами Хаббла в настоящий момент и в момент эквивалентности:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c; \quad (94)$$

$$H_{eq}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \left( \frac{a_0}{a_{eq}} \right)^3 \Omega_M \rho_c \times 2 \right). \quad (95)$$

Двойка в последней формуле учитывает вклад радиации в общую плотность,  $a_0 = 1$ . Так как  $a_{eq} = \Omega_R/\Omega_M$ , то получаем еще одно полезное соотношение

$$a_{eq} H_{eq} = k_{eq} = \sqrt{2} H_0 \Omega_M \Omega_R^{-1/2} \approx 0.0095 \text{ Мpc}^{-1} \quad (96)$$

(с учетом того, что  $H_0/c = (h/3000) \text{ Мпк}^{-1}$ ).

Для практического использования формул (82, 83) необходимо выразить массу ПЧД  $M_{BH}$  через  $M$  и контраст плотности в момент коллапса (который примерно равен контрасту плотности в момент пересечения горизонта,  $\delta_R^H$ ).

Из (85) следует, что сглаженный контраст плотности в начальный момент времени,  $\delta_R$ , и он же в момент пересечения горизонта,  $\delta_R^H$ , связаны соотношением

$$\frac{\delta_R}{\delta_R^H} \approx \frac{\delta_{k^*}(t_i)}{\delta_{k^*}(t_h)} = \left( \frac{\tau_i}{\tau_h} \right)^2 \frac{\Psi_{k^*}(\tau_i)}{\Psi_{k^*}(\tau_h)}. \quad (97)$$

Здесь мы используем приближение, в соответствии с которым сглаженный контраст плотности пропорционален своей Фурье-компоненте, соответствующей некоторому характерному значению  $k$ ,  $k = k^*$ . Если спектр  $\mathcal{P}_\delta(k)$  монотонно растет с  $k$ , то, очевидно,  $k^* \approx k_R = 1/R$ . В случае, если в спектре есть максимум при некотором  $k = k_0$ , разумной оценкой для  $k^*$  будет

$$k^* \approx \begin{cases} k_R, & k_R < k_0, \\ k_0, & k_R > k_0. \end{cases} \quad (98)$$

### 2.1.2 Модели гравитационного коллапса

Связь между значениями начальной массы флуктуации  $M$ , контраста плотности  $\delta_R^H$  и массой ПЧД  $M_{BH}$  может быть записана в общем виде как

$$M_{BH} = f(M, \delta_R^H; M_i). \quad (99)$$

Конкретная форма выражения для функции  $f$  зависит от модели гравитационного коллапса.

**Модель сферически-симметричного коллапса.** В модели коллапса Карра-Хокинга [3] рассматривается эволюция сферически - симметричной области с избыточной плотностью. Эволюция такой области происходит в

соответствии с уравнением Фридмана для случая положительной кривизны (закрытая модель Вселенной):

$$\tilde{H}^2(\tilde{t}) = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \tilde{\rho}(\tilde{t}) - \frac{1}{\tilde{R}^2(\tilde{t})}, \quad (100)$$

где  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{R}$  есть, соответственно, хаббловский параметр ( $\dot{\tilde{R}}/\tilde{R}$ ), плотность и радиус области. Знак  $\sim$  отличает величины в области флуктуации от соответствующих величин в окружающем (фоновом) пространстве, которые связаны уравнением

$$H^2(t) = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \rho(t). \quad (101)$$

Начальные условия выбираются так:

$$t = \tilde{t} = t_i \quad , \quad H = \tilde{H} = H_i \quad , \quad \tilde{R}(t_i) = R_i. \quad (102)$$

Из (100, 101) получаем

$$\delta_i \equiv \frac{\tilde{\rho}_i - \rho_i}{\rho_i} = \frac{1}{H_i^2 R_i^2}. \quad (103)$$

Область с избыточной плотностью расширяется по закону  $\tilde{R} \sim \tilde{t}^{1/2}$  [4] вплоть до остановки в момент времени  $t_c$ . Этот момент определяется из условия  $\tilde{H}(t_c) = 0$ , и равен

$$t_c = t_i \delta_i^{-1}, \quad (104)$$

в то же время

$$\tilde{R}(t_c) = R_c \cong \delta_i^{-1/2} R_i. \quad (105)$$

После достижения максимального размера  $R_c$ , возмущенная область начинает сжиматься и коллапсирует, если силы гравитационного сжатия могут



преодолеть силы давления, что происходит при условии

$$R_c > R_{Jeans} = c_s t_c \approx \frac{1}{\sqrt{3}} t_c. \quad (106)$$

Если это условие выполняется, то черная дыра обязательно образуется, так как вскоре после начала сжатия область оказывается внутри гравитационного радиуса:

$$r_g = \frac{2M}{M_{Pl}^2} \approx \frac{2\rho_c R_c^3}{M_{Pl}^2} \approx R_c^3 t_c^{-2} \geq \frac{1}{3} R_c. \quad (107)$$

Таким образом, условие образования черной дыры есть

$$\frac{1}{\sqrt{3}} t_c \leq R_c \leq t_c. \quad (108)$$

Верхнее ограничение для  $R_c$  означает, что возмущенная область не должна превышать размер горизонта, что привело бы к образованию отдельной вселенной [3, 7].

Из уравнений (104, 105) следует, что

$$\frac{R_c}{t_c} = \frac{R_i}{t_i} \cdot \delta_i^{1/2}. \quad (109)$$

Поскольку начальный момент  $t_i$  может быть выбран произвольно, выберем его так, чтобы в этот момент область с избыточной плотностью как раз проходила через горизонт, то есть было  $R = t_i$ . Тогда из (108, 109) получаем условие на контраст плотности

$$\frac{1}{3} < \delta_R^H < 1. \quad (110)$$

Таким образом, в модели сферически-симметричного коллапса контраст плотности в возмущенной области должен быть в пределах  $(1/3, 1)$ , в тот момент, когда размер этой области равен размеру горизонта.

Масса образующейся черной дыры определяется формулой

$$M_{BH} = \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho(t_c) = \frac{4}{3}\pi R_i^3 \delta_i^{-3/2} \rho(t_c), \quad (111)$$

а плотность  $\rho(t_c)$  может быть выражена через  $\delta_i$ :

$$\rho(t_c) = \rho_i \left( \frac{t_i}{t_c} \right)^2 = \rho_i \delta_i^2. \quad (112)$$

Исходная масса флуктуации есть  $\frac{4}{3}\pi R_i^3 \rho_i$ , и

$$M_{BH} = M \delta_i^{1/2} \equiv M \delta_R^{1/2} \quad (113)$$

где мы перешли к сглаживанию на масштабе  $R$ . Используя теперь приближенное соотношение между сглаженным контрастом плотности в момент пересечения горизонта и в начальный момент (в приближении постоянства гравитационного потенциала) [28],

$$\delta_R = \delta_R^H \left( \frac{M}{M_i} \right)^{-2/3}, \quad (114)$$

получаем окончательно массу черной дыры в этой модели в виде [25, 28, 26]

$$M_{BH} = f(M, \delta_R^H; M_i) = (\delta_R^H)^{1/2} M^{2/3} M_i^{1/3}. \quad (115)$$

**Модель критического коллапса.** Модель стандартного коллапса, будучи очень простой, является также и очень приближенной, и должна быть проверена с использованием численного моделирования поведения коллапсирующей области с избыточной плотностью.

В первых работах на эту тему [85] были получены результаты, в целом подтверждающие критерий формирования ПЧД ( $\delta > \gamma$ ). В более поздних

работах было обнаружено [86, 22, 87], что при коллапсе различных начальных конфигураций (имеются в виду разные начальные профили плотности) всегда имеется “критическое” решение, отделяющее начальные конфигурации, образующие в конечном итоге черную дыру, от не образующих ее. Семейства таких конфигураций описываются некоторым индексом  $p$ , и при достижении критического значения  $p = p_c$  конечным результатом эволюции области становится черная дыра, масса которой зависит от  $p$  как  $(p - p_c)^{\eta_c}$  с некоторым  $\eta_c = \text{const}$ .

В случае эволюции неоднородности в расширяющейся Вселенной, описываемой метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера, связь массы черной дыры с массой горизонта в момент ее образования получается в виде [22]

$$M_{BH} = k_c (\delta_R^H - \delta_c)^{\gamma_c} M_h, \quad (116)$$

где  $\delta_c$ ,  $\gamma_c$  и  $k_c$  - параметры модели. Необходимая нам функция  $f$  тогда

$$f(M, \delta_R^H; M_i) = k_c (\delta_R^H - \delta_c)^{\gamma_c} M^{2/3} M_i^{1/3}. \quad (117)$$

В этой работе мы принимаем следующий набор параметров, в согласии с недавними результатами работ [87, 88]:

$$\delta_c = 0.45, \quad \gamma_c = 0.36, \quad k_c = 4. \quad (118)$$

Интересно, что в этой модели масса черной дыры может быть много меньше  $M_h$  в момент образования - если только  $\delta_R^H$  достаточно близка к  $\delta_c$ .

### 2.1.3 Временная зависимость гравитационного потенциала

Для расчета временной зависимости потенциала  $\Psi$  мы использовали подход, предложенный в [89]. Предполагается, что послеинфляционный

разогрев (рехитинг) происходит практически мгновенно (за время, много меньшее  $H^{-1}$ ), и, соответственно, момент конца инфляции совпадает с моментом начала радиационной эпохи. При этом, в отличие от [89], мы, вообще говоря, не предполагаем верность приближения “медленного скатывания” в течение инфляции (и в конце нее).

Общее выражение для  $\Psi_k$  в радиационную эпоху выглядит как

$$\Psi_k^{(\text{rad})}(\tau) = A_k f_A(x) + B_k f_B(x), \quad (119)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{x^3}(x \cos x - \sin x), \quad (120)$$

$$f_B(x) = \frac{1}{x^3}(x \sin x + \cos x), \quad (121)$$

где  $x = c_s k \tau$ , а  $c_s^2 = \dot{p}/\dot{\rho} = 1/3$  - скорость звука. Связь между  $\Psi_k$  и Фурье-компонентой сопутствующего возмущения кривизны  $\mathcal{R}$  в калибровочно - инвариантном формализме космологической теории возмущений дается двумя соотношениями (см., например, обзор [54]):

$$\dot{\mathcal{R}}_k(\tau) = \frac{2}{3}H \left( \frac{k}{aH} \right)^2 \frac{\Psi_k(\tau)}{1+w}, \quad (122)$$

$$\frac{2}{3H} \dot{\Psi}_k(\tau) + \frac{5+3w}{3} \Psi_k(\tau) = -(1+w) \mathcal{R}_k(\tau). \quad (123)$$

Для получения коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$  необходимо два условия на  $\Psi_k(\tau)$ . Первое - равенство (122) в момент конца инфляции, когда  $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_k^{(\text{inf})}$ ,  $\Psi_k = \Psi_k^{(\text{inf})}$ ,  $\tau = \tau_i$ , и  $aH = a_i H_i$ . Второе получается из (123), подсчитанного в момент начала радиационной эпохи, когда  $\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_k^{(\text{rad})}$ ,  $\Psi_k = \Psi_k^{(\text{rad})}$ , и  $w = w_0 = 1/3$ . Условия сшивки в момент фазового перехода [90, 91, 89]:

$$\Psi_k^{(\text{inf})}(\tau_i) = \Psi_k^{(\text{rad})}(\tau_i), \quad (124)$$

$$\mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i) = \mathcal{R}_k^{(\text{rad})}(\tau_i). \quad (125)$$

Используя уравнения (122, 123) и (124, 125), получаем для коэффициентов  $A_k, B_k$  следующие условия:

$$A_k f_A(x_i) + B_k f_B(x_i) = \frac{3}{2H_i} \left( \frac{k}{a_i H_i} \right)^{-2} (1+w) \dot{\mathcal{R}}_k^{(\text{inf})}(\tau_i), \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \frac{2c_s k}{3a_i H_i} [A_k f'_A(x_i) + B_k f'_B(x_i)] + \frac{5+3w_0}{3} [A_k f_A(x_i) + B_k f_B(x_i)] = \\ = -(1+w_0) \mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i). \end{aligned} \quad (127)$$

Необходимые для использования в этих соотношениях  $\mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i)$  и  $\dot{\mathcal{R}}_k^{(\text{inf})}(\tau_i)$  могут быть определены численным расчетом с использованием конкретной теоретической (инфляционной) модели (см. Главу 1).

Для простоты, в этой работе мы будем предполагать, что правая часть уравнения (126) пренебрежимо мала. Это обеспечивается, во-первых, членом  $(1+w)$ , близким к нулю при инфляции с выполнением условий “медленного скатывания” [89], и, во-вторых, тем, что производная  $\dot{\mathcal{R}}(k)$  также мала в силу выхода на константу  $\mathcal{R}(k)$  в режиме далеко за горизонтом. В результате этого упрощения,  $\Psi_k^{(\text{rad})}(\tau)$  оказывается пропорциональным  $\mathcal{R}_k^{(\text{rad})}(\tau_i)$ , и, вместо (86), получается простая связь между спектром возмущений плотности в любой момент времени и спектром возмущений кривизны в начальный момент времени:

$$\mathcal{P}_\delta(k, t) = \left[ \frac{2}{3} (k\tau)^2 \frac{\Psi_k(\tau)}{\mathcal{R}_k(\tau_i)} \right]^2 \mathcal{P}_\mathcal{R}(k, t_i), \quad (128)$$

где решение для  $\Psi_k(\tau)$  получается в виде [89]

$$\Psi_k(\tau) = \frac{2\mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i)}{x^3} [(x-x_i) \cos(x-x_i) - (1+xx_i) \sin(x-x_i)]. \quad (129)$$

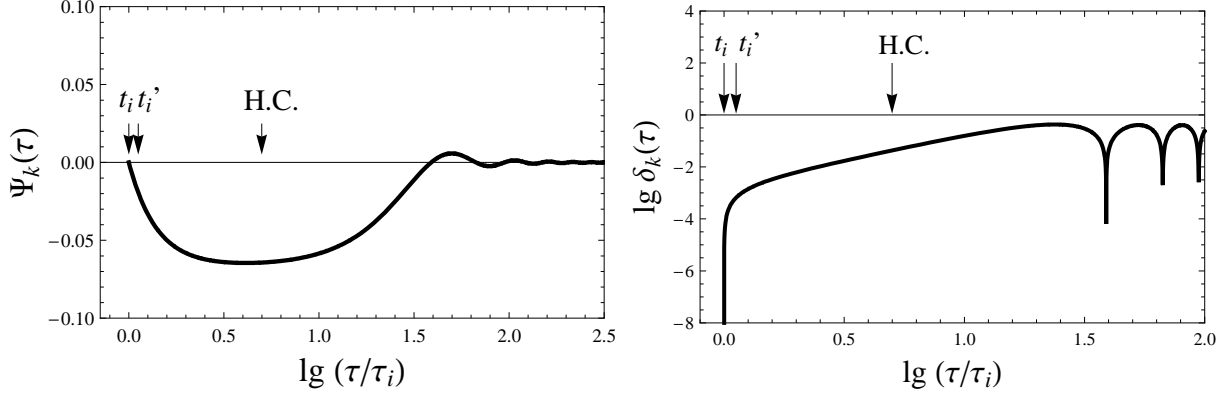


Рис. 14: Временные зависимости гравитационного потенциала  $\Psi_k$  (слева) и контраста плотности  $\delta_k$  (справа). “H.C.” обозначает момент захода моды под горизонт. Волновое число  $k = 0.2\tau_i^{-1}$ , а нормализация определяется условием  $\mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i) = 0.1$ .

Соответственно, в этом приближении только одно значение,  $\mathcal{R}_k^{(\text{inf})}(\tau_i)$ , необходимо для расчета бардиновского потенциала в любой момент времени.

На рис. 14 показаны характерные результаты расчетов с использованием (129) и (85). Видно, что в нашем подходе эволюция  $\Psi_k$  и  $\delta_k$  начинается с нулевого значения. В практическом расчете спектра масс ПЧД мы, поэтому, сдвигаем начальный момент времени:  $t_i \rightarrow t'_i$ , пренебрегая рождением ПЧД в течение короткого интервала времени  $\Delta t = t'_i - t_i$ . Конкретно,  $\Delta t$  определяем условием  $\lg(t'_i/t_i) = 0.1$ , во всех численных расчетах.

Следует отметить, что пренебрежение временной зависимостью  $\Psi$  сильно упрощает расчет спектров масс ПЧД, потому что сглаженный контраст плотности  $\delta_R$  в этом случае входит в выражение для спектра масс только в отношении  $\delta_R/\sigma_R$ . В пределе постоянного  $\Psi_k$ , из (93) и (87) получается,

$$\delta_R \approx \frac{M_i}{M_h} \delta_R^H = \frac{k_R^2}{a_i^2 H_i^2} \delta_R^H. \quad (130)$$

В том же пределе, выражение для дисперсии

$$\sigma_R^2 \approx \left( \frac{k_R}{a_i H_i} \right)^4 \int \frac{4}{9} (kR)^4 \mathcal{P}_\Psi(k) W^2(kR) \frac{dk}{k} \equiv \left( \frac{k_R}{a_i H_i} \right)^4 \sigma_H^2. \quad (131)$$

Из уравнений (130) и (131) следует, что

$$\frac{\delta_R^2}{\sigma_R^2} \approx \frac{(\delta_H^2)}{\sigma_H^2}. \quad (132)$$

Это отношение не зависит от времени. Понятно поэтому, что временная зависимость  $\Psi_k$  (см., например, рис. 14) будет влиять на форму спектра масс ПЧД.

#### 2.1.4 Спектр мощности с максимумом

Одним из типов моделей, в которых возможно рождение большого количества ПЧД, являются сценарии, в которых спектр мощности  $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$  имеет высокий пик при некотором  $k = k_0$  в области малых масштабов. Такие модели были рассмотрены во многих работах (см. Главу 1 и ссылки в ней).

Имея точную форму  $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$ , всегда можно рассчитать спектр масс ПЧД, используя формализм, изложенный в предыдущем разделе. Для получения более общих результатов, однако, удобно принять некоторую параметризацию  $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$ , и использовать ее для расчета спектра масс (как, например, делали авторы работы [23]). К примеру, спектры возмущений кривизны, полученные в Главе 1 (конкретно, случаи двугорбого потенциала и потенциала Коулмена-Вайнберга - см. рис. 5 и 7) могут быть довольно хорошо аппроксимированы в области максимума распределением следующей формы:

$$\lg \mathcal{P}_\mathcal{R}(k) = B + (\lg \mathcal{P}_\mathcal{R}^0 - B) \exp \left[ - \frac{(\lg k/k_0)^2}{2\Sigma^2} \right]. \quad (133)$$

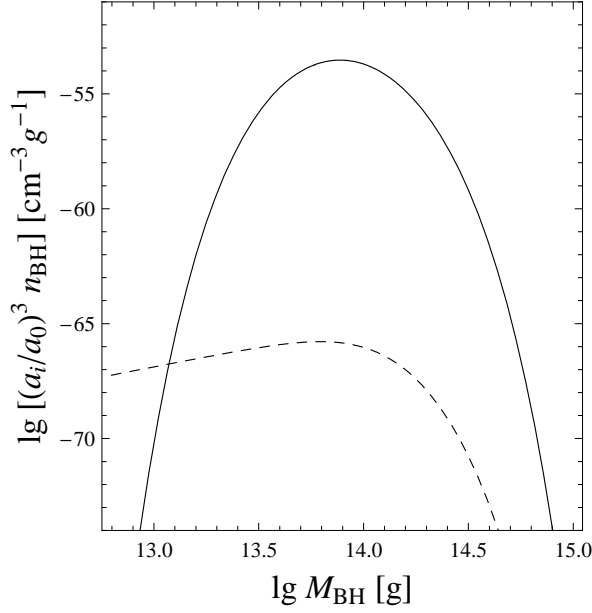


Рис. 15: Спектр масс ПЧД, рассчитанный в модели коллапса Карра-Хокинга (сплошная линия) и в модели критического коллапса (пунктирная линия). Использован следующий набор параметров:  $\Sigma = 3$ ,  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.02$ ,  $M_h^0 = 10^{14}$  г.

Здесь  $B$  соответствует “подложке” спектра и известно из наблюдений на больших масштабах ( $B \approx -8.6$ ), его точное значение не влияет на спектр вблизи максимума. Значение  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  характеризует высоту пика (т.е. максимальное значение, достигаемое спектром при  $k = k_0$ ), а  $\Sigma$  характеризует ширину распределения.

Понятно, что любой спектр с максимумом можно более или менее точно охарактеризовать в наиболее важной области (около этого максимума) только тремя параметрами, определяющими положение, высоту и ширину пика. Таким образом, результаты расчетов в предположении конкретной формы (133) будут достаточно общими, т.к. рождение ПЧД определяется, в основном, областью спектра вблизи максимума.



Связь между  $k_R$  и массой горизонта  $M_h$  в момент захода моды под горизонт определяется из (87) и (93):

$$M_h(k_R) = \frac{M_i(a_i H_i)^2}{k_R^2} = M_{eq} \left( \frac{k_{eq}}{k_R} \right)^2, \quad (134)$$

и далее мы будем использовать обозначение  $M_h^0 = M_h(k_0)$  для массы горизонта, соответствующей значению  $k_0$ .

Результат расчета спектра масс ПЧД для конкретного набора параметров показан на рис. 15. Видно, что спектр масс сильно зависит от модели гравитационного коллапса (при том же спектре флуктуаций плотности). На этом и некоторых других рисунках по вертикальной оси отложено значение  $n_{BH} \times (a_i/a_0)^3$ , равное сопутствующей концентрации ПЧД. Оно не зависит от параметров модели  $T_{RH}$  и  $t_i$  в пределе  $k_{end} \equiv a_i H_i \gg k_0$ . Случай, когда ПЧД рождаются при значениях  $k \sim k_{end}$  будет рассмотрен далее, в разделе 2.4.

Рисунок 16 показывает зависимость спектра масс ПЧД от параметра  $\Sigma$  в (133). Видно, что эта зависимость достаточно сильна, что следует из экспоненциальной чувствительности  $n_{BH}$  к дисперсии  $\sigma_R(M)$  (которая, в свою очередь, определяется формой спектра, включая его ширину). Видно также, что в модели с пиком спектр масс всегда имеет довольно резкий максимум при массе ПЧД  $\sim M_h^0$ .

Доля массы Вселенной, содержащаяся сегодня в ПЧД,  $\Omega_{РВН}$ , в предположении, что масса этих черных дыр не меняется со временем, равна

$$\Omega_{РВН} = \frac{1}{\rho_c} \left( \frac{a_i}{a_0} \right)^3 \int M_{BH} n_{BH}(M_{BH}) dM_{BH} \quad (135)$$

( $\rho_c$  - критическая плотность). Эта формула достаточно точна для черных

дыр с массой  $M_{BH} \gg M_*$ , где  $M_* \approx (3t_0\alpha_0)^{1/3} \approx 5 \times 10^{14}$  г - начальная масса ПЧД, находящихся сегодня на финальной стадии своего испарения [92],  $\alpha_0 = 8.42 \times 10^{25}$  г<sup>3</sup>сек<sup>-1</sup>, а  $t_0$  - возраст Вселенной.

Отметим, что для конкретных спектров масс, показанных на рис. 16, имеем, для случая  $\Sigma = 5$ , неравенство  $\Omega_{P_{BH}} > 1$ , что является недопустимым: рождение такого большого количества ПЧД запрещено наблюдениями. Далее мы обсудим более детально возможность ограничить параметры распределения (133). Значение  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.0172$ , выбранное для расчетов спектров масс рис. 16, соответствует, в случае  $\Sigma = 3$ , значению  $\Omega_{P_{BH}}$  равному  $\approx 0.23$ . Это находится в области, позволяющей объяснить присутствием ПЧД во Вселенной наблюдение небарионной темной материи [93],

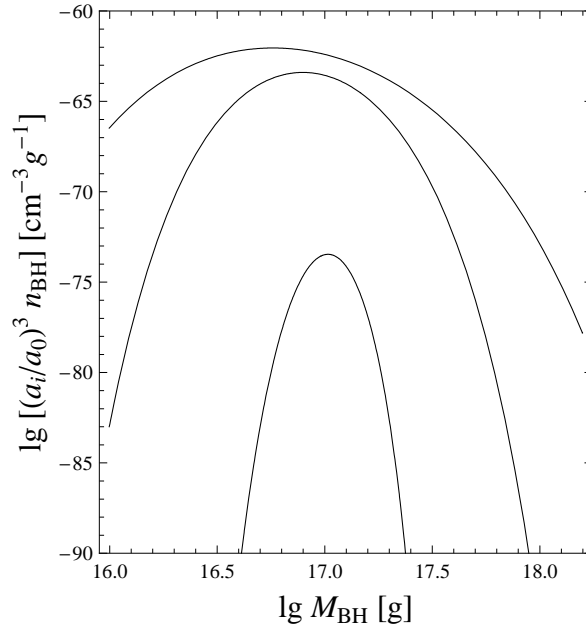


Рис. 16: Спектры масс ПЧД для стандартной модели коллапса, с параметрами спектра возмущений кривизны  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.0172$ ,  $M_h^0 = 10^{17}$  г (для всех кривых); снизу вверх,  $\Sigma = 1, 3, 5$ .

$\Omega_{\text{nbm}} h^2 = 0.106 \pm 0.008$  (с неопределенностью  $1\sigma$ ). В случае  $\Sigma = 1$ , оказывается, что  $\Omega_{\text{РВН}} \sim 10^{-10}$  - вероятно, слишком мало, чтобы обеспечить какие-то наблюдательные проявления.

## 2.2 Спектры фотонов и нейтрино от испарения первичных черных дыр

Испарение черных дыр, предсказанное Хокингом [9], приводит к появлению изотропного внегалактического фона гамма-квантов [10] и нейтрино [28], образованного ПЧД, который может быть, по крайней мере в принципе, измерен экспериментально. При наличии спектра масс ПЧД этот фон может быть рассчитан и сравнен с имеющимися данными эксперимента.

Эволюция спектра масс ПЧД в результате испарения может быть описана следующим приближенным соотношением [28]:

$$n_{\text{ВН}}(m, t) = \frac{m^2}{(3\alpha t + m^3)^{2/3}} n_{\text{ВН}} \left( (3\alpha t + m^3)^{1/3} \right), \quad (136)$$

где  $\alpha$  учитывает степени свободы испаряемых частиц, и, строго говоря, является функцией меняющейся во времени массы ПЧД  $m$ . В наших численных расчетах мы используем приближение

$$\alpha = \text{const} = \alpha(M_{\text{ВН}}^{\text{max}}), \quad (137)$$

где  $M_{\text{ВН}}^{\text{max}}$  - значение  $M_{\text{ВН}}$ , соответствующее максимуму начального спектра масс. Отдельное изучение этого вопроса показывает, что ошибки, связанные с таким приближением, достаточно малы [28]. В данной работе используется параметризация функции  $\alpha(M_{\text{ВН}})$ , данная в работе [28].

Выражение для внегалактического диффузного энергетического спектра фотонов или нейтрино (полный вклад от всех ПЧД за все время жизни Вселенной) дается формулой [28]

$$\begin{aligned}
S(E) &= \frac{c}{4\pi} \int dt \frac{a_0}{a} \left( \frac{a_i}{a_0} \right)^3 \int n_{BH} \left( (3\alpha t + m^3)^{1/3} \right) \times \\
&\quad \times \varphi(E(1+z), m) e^{-\tau(E,z)} \frac{m^2 dm}{(3\alpha t + m^3)^{2/3}} \equiv \\
&\quad \equiv \int F(E, z) d \lg(z+1).
\end{aligned} \tag{138}$$

В этой формуле  $a_i$ ,  $a$ , и  $a_0$  - масштабные факторы в моменты  $t_i$ ,  $t$  и  $t_0$ , соответственно, а  $\varphi(E, m)$  - мгновенный спектр излучения (нейтрино или фотонов) от испарения одной черной дыры массы  $m$ . Экспоненциальный фактор в (138) учитывает поглощение излучения при распространении в пространстве. Процессы поглощения нейтрино подробно рассмотрены, в данном контексте, в [28].

В последней строке (138) мы перешли от переменной  $t$  к красному смещению  $z$ , используя плоскую космологическую модель с  $\Omega_\Lambda \neq 0$ , для которой

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{1}{H_0} \frac{(\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_\Lambda)^{-1/2}}{(1+z)} \tag{139}$$

( $H_0 = 100h$  км/(с Мпк),  $\Omega_R = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$ ), используя следующий набор основных космологических констант [93]:  $h = 0.73$ ,  $\Omega_M h^2 = \Omega_{nbm} h^2 + \Omega_B h^2 = 0.128$ ,  $\Omega_\gamma h^2 = 2.47 \times 10^{-5}$ ,  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M - \Omega_R$ . Доля нейтрино в полной плотности,  $\Omega_\nu$ , рассчитывается в предположении равенства нулю массы нейтрино, в этом случае  $\Omega_\nu = \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \times 3\Omega_\gamma \approx 0.68\Omega_\gamma$  (важно, что член с  $\Omega_R$  существенен в (139) только для  $z \gtrsim \Omega_M/\Omega_R$ , когда энергия реликтовых

нейтрино еще достаточно велика - больше, чем существующие пределы на их массу покоя).

Прямой поток частиц в результате хокинговского излучения (на одну степень свободы) равен

$$\varphi(E, M_{BH}) = \frac{dN}{dEdt} = \frac{\Gamma_s}{2\pi} \frac{1}{\exp(E/T_H) - (-1)^{2s}}, \quad (140)$$

где  $\Gamma_s$  - серый фактор ( $\Gamma_s = \sigma_s E^2/\pi$  для безмассовых частиц;  $\sigma_s$  - сечение поглощения), а  $T_H$  - температура Хокинга

$$T_H = \frac{m_{Pl}^2}{8\pi M_{BH}} = 1.06 \left( \frac{10^{13} \text{g}}{M_{BH}} \right) \text{GeV}. \quad (141)$$

В пределе высоких энергий ( $E \gg T_H$ ), сечение  $\sigma_s$  достигает постоянного значения, не зависящего от спина частицы  $s$ , и  $\Gamma_s$  в этом случае равен

$$\Gamma_s = \frac{27}{64\pi^2} \frac{E^2}{T_H^2}. \quad (142)$$

При меньших энергиях, для случая фотонов мы получили следующую приближенную формулу:

$$\Gamma_\gamma \approx \begin{cases} \frac{27}{64\pi^2} \frac{E_\gamma^2}{T_H^2} (\exp[9.08 - 1.71(E_\gamma/T_H)] + 1)^{-1}, & E_\gamma \geq 2.5T_H, \\ \frac{4}{3} \left( \frac{E_\gamma}{4\pi T_H} \right)^4, & E_\gamma < 2.5T_H. \end{cases} \quad (143)$$

В этой формуле, низкоэнергетическая часть соответствует аналитическому выражению  $\sigma_{s=1}(E \rightarrow 0) = \frac{4}{3}\pi r_g^2 (Er_g)^2$  [92], а высокоэнергетическая - приближение, сглаживающее осцилляции в  $\sigma_s$ , см. рис. 17. Форма выражения (143) при высоких энергиях аналогична подобному выражению, полученному в [95] для нейтрино,

$$\Gamma_\nu = \frac{27}{64\pi^2} \frac{E^2}{T_H^2} \left( 0.075 + \frac{0.925}{\exp[5 - 1.607(E/T_H)] + 1} \right). \quad (144)$$

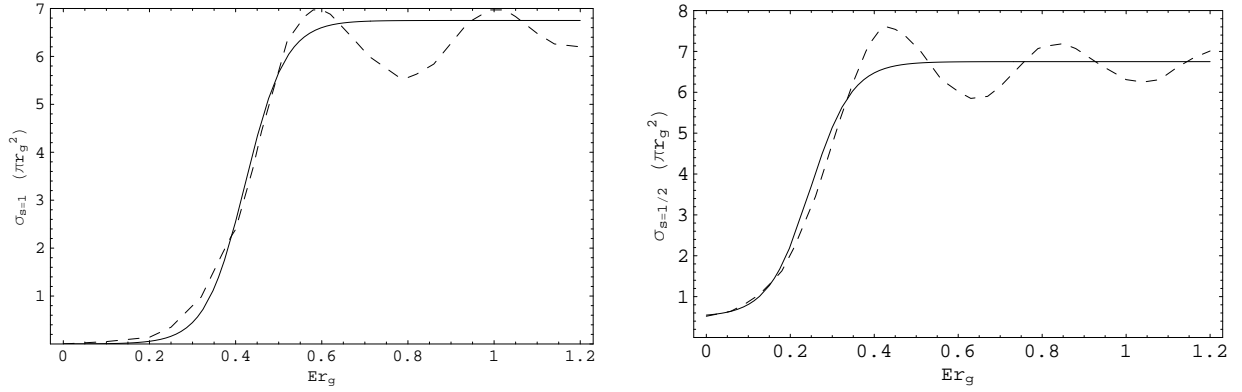


Рис. 17: Сечения поглощения  $\sigma_s$  для безмассовых частиц, в единицах  $\pi r_g^2$ . Левый график:  $s = 1$ . Правый:  $s = 1/2$ . Штриховая линия представляет собой результаты [48, 94], сплошные кривые соответствуют формулам (143), (144).

Кроме прямых хокинговских частиц, фотоны и нейтрино при испарении ПЧД могут рождаться как продукт распада других испаренных частиц (например,  $\pi$ -мезонов). Здесь мы учитываем вклад вторичных частиц, используя модель [48] и параметризации спектров из работы [96]. В этих статьях был вычислен спектр вторичных частиц, образующихся в результате процессов фрагментации испаренных кварков и последующего распада мезонов. Более подробно модели испарения черных дыр обсуждаются нами в Главе 4.

На рис. 18 показана зависимость подынтегральной функции  $F(E, z)$  от красного смещения  $z$  для энергии фотонов или нейтрино, равной 1 ГэВ. Видно, что распределение шире в случае критического коллапса, т.к. в этом случае спектр масс ПЧД имеет длинный “хвост” в области малых масс. Эффекты поглощения (фактор  $e^{-\tau}$ ) важны: для фотонов, максимальное

значение  $z$ , при котором Вселенная для них прозрачна, порядка 700 [97]; для нейтрино поглощение важно при  $z \gtrsim 10^6 - 10^7$  [28].

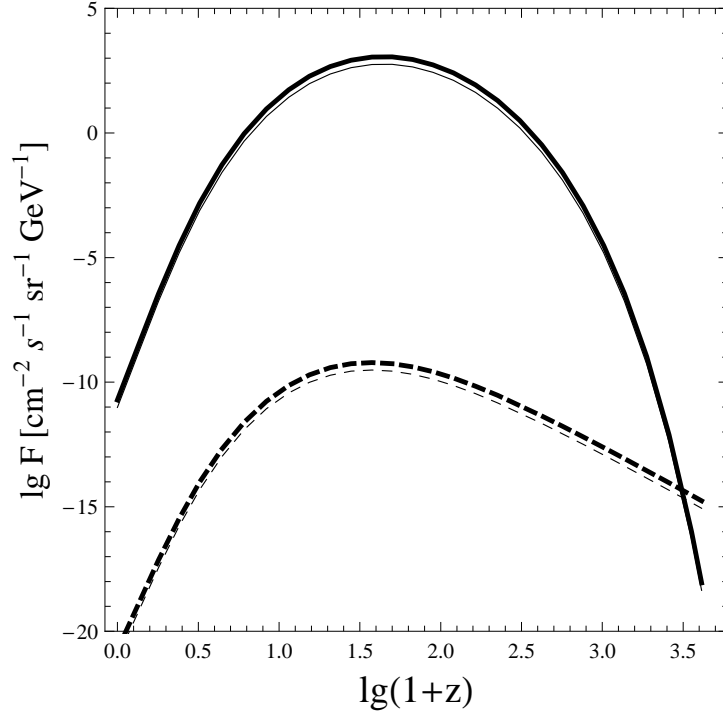


Рис. 18: Зависимость подынтегральной функции  $F(E, z)$  от красного смещения  $z$ . Толстые линии соответствуют нейтрино, тонкие - фотонам. Поглощение фотонов при  $z \gtrsim 700$  на данном рисунке не показано. Пунктирные линии соответствуют случаю критического коллапса, сплошные - стандартному коллапсу. Для расчетов использовались спектры масс ПЧД, соответствующие рис. 15,  $E = 1$  ГэВ во всех случаях.

## 2.3 Ограничения на спектр флуктуаций с максимумом

Предполагая, что  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  может быть параметризован в форме (133), мы можем рассчитать соответствующий спектр масс ПЧД и сравнить возможные наблюдательные проявления существования такого количества ПЧД с тем, что реально наблюдается. Эта процедура позволяет получить ограничения на параметры данного распределения. Расчет ограничений в данной работе использует следующие факты.

1. Дифференциальный энергетический спектр внегалактического гамма-излучения в широком диапазоне энергий хорошо известен [98]. Для наших целей наиболее важна область  $E_{\gamma} \sim 1$  МэВ - 1 ГэВ, и порядок потока фотонов дается  $E^2 S_{\gamma}(E) \sim 10^{-6}$  ГэВ см<sup>-2</sup> с<sup>-1</sup> ср<sup>-1</sup> в этой области. Мы получаем ограничения из условия, чтобы диффузный фон фотонов от ПЧД не превышал этот наблюдаемый внегалактический поток.

2. В соответствии с данными установки Супер-Камиоканде [99], фоновый поток электронных антинейтрино в пространстве ограничен неравенством

$$\Phi(E_{\bar{\nu}_e} > 19.3 \text{ MeV}) < 1.2 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}. \quad (145)$$

Мы интегрируем рассчитанный нами спектр антинейтрино и ставим ограничения из условия, чтобы этот интегральный поток не превышал предел (145). Ограничение (145) не является модельно независимым: оно было получено в предположении экспоненциально падающего спектра нейтрино, который ожидается от фона, образованного взрывами сверхновых [100] (см. также обзор [101]). Поток нейтрино от испарений ПЧД в диапазоне



масс, который мы будем рассматривать, спадает как  $E_\nu^{-3}$ , что несколько поменяло бы ограничение (145). Оценки показывают, однако, что это изменение порядка 2, что незначительно для получения ограничений на такие параметры, как  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$ . Похожая неопределенность возникает при учете нейтринных осцилляций, чего мы также не делаем.

3. Доля плотности энергии Вселенной в ПЧД,  $\Omega_{\text{PВН}}$ , которая может быть рассчитана по формуле (135), не может превышать долю плотности небарионной холодной темной материи,  $\Omega_{\text{nbm}}$  [93]. Это ограничение важно для ПЧД с  $M_{\text{ВН}} > M_*$ , т.е., еще не испарившихся. Реально в работе мы использовали условие  $\Omega_{\text{PВН}} < 0.3$  (учитывая все неопределенности,  $\Omega_{\text{nbm}} = 0.3$  находится в области, разрешенной на уровне  $3\sigma$ , однако, неопределенность в данном числе очень мало влияет на ограничения параметров спектра флуктуаций).

Полученные с учетом всех трех условий ограничения на параметры распределения (133) показаны на рис. 19. Значение параметра  $\Sigma$  было фиксировано во время вычислений ( $\Sigma = 3$ ). Ограничения даны как функция массы горизонта  $M_h^0$ . Связь между  $M_h^0$  и  $k_0$  дается формулой, следующей из (134):

$$k_0 \approx \frac{2 \times 10^{23}}{\sqrt{M_h^0/1g}} \text{ Мpc}^{-1}. \quad (146)$$

Из рис. 19 видно, что ограничения на параметры спектра первичных флуктуаций сильнее в случае предположения модели стандартного коллапса Карра-Хокинга, что понятно, т.к. в ней предполагается более низкий порого рождения ПЧД. Ограничения не зависят от температуры рехитинга, если она достаточна велика и выполняется условие  $M_i \ll M_h^0$

(это верно для всей области масс ПЧД, которые мы рассматриваем, если  $T_{RH} \gtrsim 10^{11}$  ГэВ).

Другой важный результат - ограничения, основанные на поиске фона антинейтрино от ПЧД, оказываются сравнимы со следующими из изучения фона гамма-квантов (и из гравитационных ограничений). В области малых

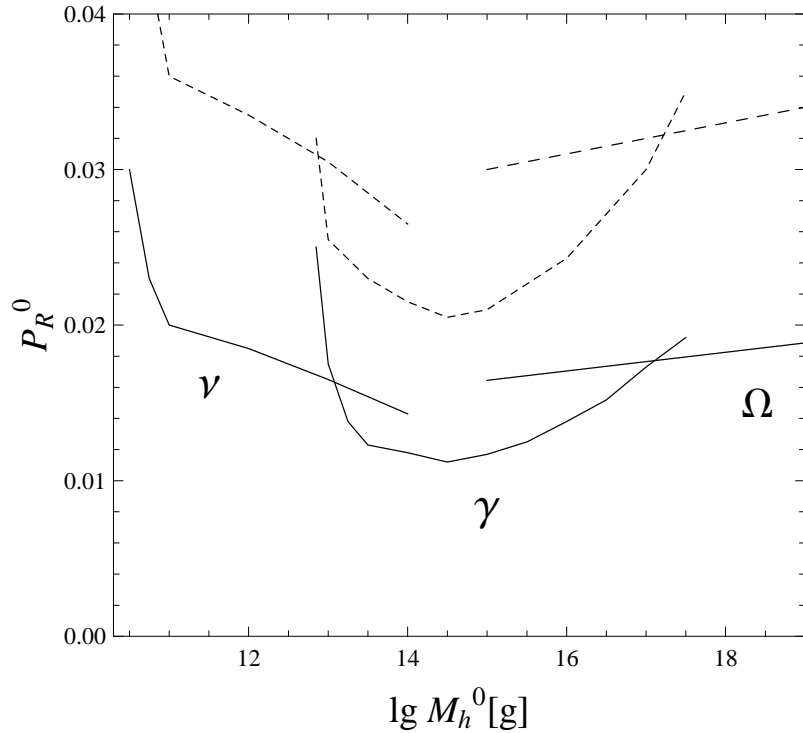


Рис. 19: Ограничения на параметр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  распределения (133), полученные в работе. Для данного рисунка,  $\Sigma = 3$ . Запрещенные по ПЧД значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  лежат выше кривых, изображенных на рисунке. Показаны ограничения, следующие из наблюдений фонов фотонов и нейтрино, а также ограничение по плотности энергии ПЧД. Штрихованные кривые соответствуют модели критического коллапса, сплошные - предположению модели стандартного коллапса.

масс горизонта (большие  $k_0$ ), где важны большие значения красного смещения (вплоть до  $10^7$ ), ограничения по нейтрино оказываются сильнее. Мы не рассматриваем ограничения по нейтрино для  $M_h^0 \gtrsim M_*$ , т.к. фон нейтрино в этом случае сильно отличается от простого поведения  $\sim E_\nu^{-3}$ , и нужен дополнительный анализ, чтобы оценить, как в этом случае изменится предел (145).

## 2.4 Ограничения на модель с “бегущей массой”

Как мы видели в Главе 1, инфляционная модель с “бегущей массой” предсказывает достаточно сильную зависимость спектра скалярных флуктуаций от  $k$ , что, в принципе, может приводить к достижению спектром  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  больших значений на малых масштабах (см. рис. 10). Это, в свою очередь, может приводить к рождению значительного количества ПЧД. Первые ограничения из ненаблюдения ПЧД на параметры данной модели были получены в [102, 29]. Спектр масс ПЧД, однако, ранее детально не рассчитывался, и мы сделаем это в данном разделе с использованием ранее изложенного формализма.

В частности, покажем, как можно ограничить допустимые значения наблюдаемых параметров  $n_0$  (спектральный индекс) и  $n'_0 = dn/d \ln k$ , предполагая верность модели БМ.

Мы видели в Главе 1, что параметры  $c$  и  $s$ , определяющие форму инфляционного потенциала в данной модели, однозначно связаны с  $n_0$  и  $n'_0$ :

$$n_0 - 1 \approx 2(s - c) \quad , \quad n'_0 \approx 2sc \quad , \quad (147)$$

поэтому измерение (или предположение конкретных значений)  $n_0$  и  $n'_0$  поз-

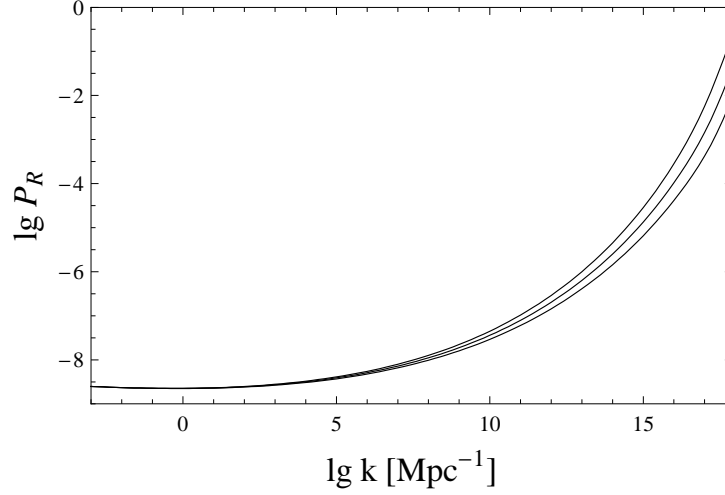


Рис. 20: Спектр мощности  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ , рассчитанный в модели БМ, для  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ,  $n_0 = 0.97$ , снизу вверх,  $10^3 n'_0 = 4.3, 4.5, 4.7$ .

воляет восстановить форму потенциала в данной модели, при этом остается единственный свободный параметр  $V_0$  (либо  $H_I$ ). Его значение может быть разным, в работе [73] приводятся аргументы, что разумные значения  $H_I$  находятся в области  $\sim 10^{-3}$  ГэВ до  $\sim 10^4$  ГэВ. Предполагая мгновенный рехитинг при некотором значении поля инфлатона, из закона сохранения энергии получаем:

$$\frac{\pi^2}{30} g_* T_{RH}^4 = V_0 \quad (148)$$

( $g_* \approx 100$ ), и  $T_{RH}$  оказывается в области  $10^7 - 10^{11}$  ГэВ для приведенных выше значений  $H_I$ . Для дальнейших вычислений выберем два конкретных значения  $T_{RH}$ , а именно,  $10^8$  ГэВ и  $10^{10}$  ГэВ.

Как мы видели в Главе 1, для расчета спектра возмущений кривизны в области больших  $k$  в модели БМ необходимы численные методы. Примеры численно полученных спектров  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  для разных значений параметров показаны на рис. 20, из которого видно, насколько значение  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  вблизи конца

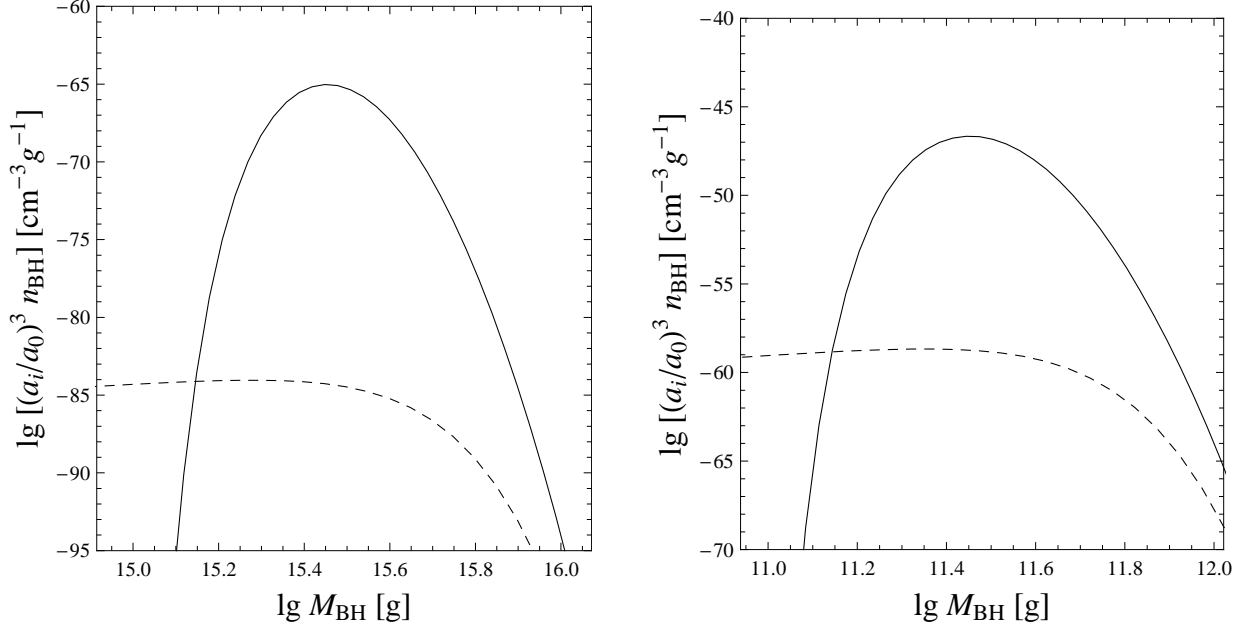


Рис. 21: Примеры спектров масс ПЧД, получающихся в модели БМ. Расчеты проведены для следующих наборов параметров: (*слева*)  $T_{RH} = 10^8$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$ ,  $n'_0 = 5.33 \times 10^{-3}$ ; (*справа*)  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$ ,  $n'_0 = 4.4 \times 10^{-3}$ . Сплошные линии соответствуют предположению о стандартной модели коллапса, пунктирные - критическому коллапсу.

спектра чувствительно к изменению производной спектрального индекса на космологических масштабах,  $n'_0$ .

Примеры расчета спектров масс ПЧД для модели БМ даны на рис. 21. Порядок величины массы образующихся ПЧД дается начальной массой горизонта,  $M_i$ , которая равна

$$M_i = \frac{4}{3} \pi t_i^3 \rho_i \approx 0.038 \frac{m_{Pl}^3}{g_*^{1/2} T_{RH}^2}. \quad (149)$$

Реальный спектр масс, и, в частности, его максимум, определяются динамикой рождения ПЧД, включая временную зависимость гравитационного

потенциала  $\Psi_k$ . Эта зависимость особенно важна в области наименьших масс образующихся ПЧД, т.е., в случае  $k_R \sim k_{end}$ . Например, в модели стандартного коллапса с монотонно растущим спектром возмущений кривизны в приближении  $\Psi_k = \text{const}$  мы ожидаем, что бóльшая часть ПЧД рождается при наименьшей возможной массе, т.е., около  $M_{BH} \approx \sqrt{1/3} M_i$  (например,  $M_{BH} \approx 7 \times 10^{14}$  г для  $T_{RH} = 10^8$  ГэВ). Из рис. 21 видно, однако, что на самом деле максимум распределения в этом случае находится около  $M_{BH} \approx 3 \times 10^{15}$  г, что вызвано подавлением рождения ПЧД при меньших массах.

На рисунке 22 показаны ограничения на набор параметров  $(n_0, n'_0)$ , полученные в предположении, что модель БМ верна и отвечает за генерацию наблюдаемого спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ . Восстанавливая потенциал из значений  $n_0, n'_0$  и  $T_{RH}$ , мы рассчитываем спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  во всей области волновых чисел вплоть до  $k_{end}$ , и соответствующий спектр масс ПЧД. Конкретное условие для получения ограничений зависит от характерной массы образующихся ПЧД: для  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ, масса ПЧД в максимуме распределения около  $3 \times 10^{11}$  г (см. рис. 21), и используются данные по фону электронных антинейтрино (см. раздел 2.3). Для  $T_{RH} = 10^8$  ГэВ, характерные массы ПЧД  $\sim 3 \times 10^{15}$  г, и ограничения получаются из данных по внегалактическому фону гамма-квантов.

Из рис. 22 видно, что, если модель БМ действительно верна, то производная спектрального индекса,  $n'_0$ , сильно ограничена по данным ПЧД и не может превышать  $(3 - 6) \times 10^{-3}$  (точное ограничение зависит от других параметров).

## 2.5 Первичные черные дыры как темная материя

Достаточно тяжелые ПЧД, рожденные в ранней Вселенной, могут составлять часть наблюдаемой темной материи, и, в принципе, возможно объяснить их присутствием во Вселенной все небарионное темное вещество. Например, как мы видели, спектр масс ПЧД рисунка 16 (для случая  $\Sigma = 3$ ) дает  $\Omega_{PBH} \approx 0.23$ .

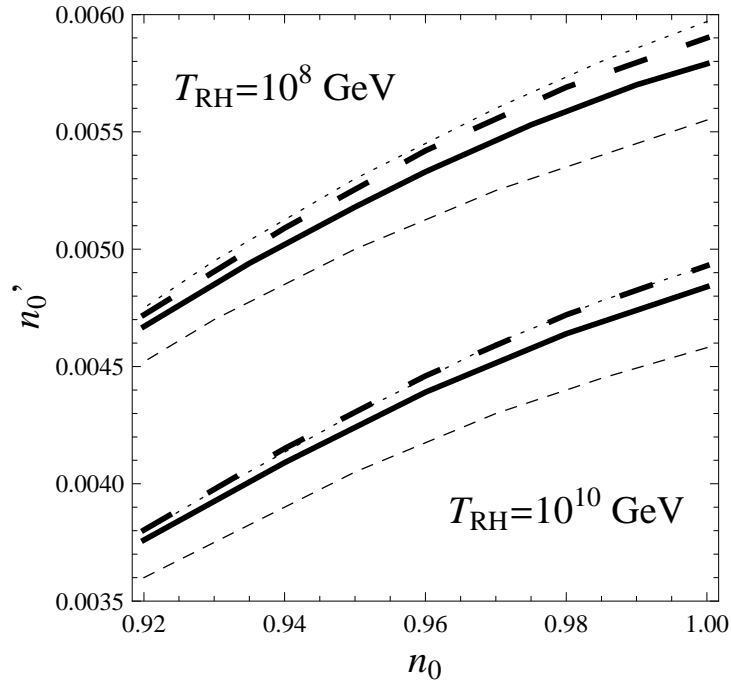


Рис. 22: Полученные в работе ограничения на параметры модели БМ из ПЧД, для двух значений параметра  $T_{RH}$ . Запрещенные области параметров лежат выше соответствующих кривых. Сплошные толстые линии соответствуют ограничениям в предположении модели стандартного коллапса, пунктирные толстые линии - предположению критического коллапса. Тонкие линии показывают, для сравнения, значения  $n_0$  и  $n'_0$ , для которых при  $k = k_{end}$  достигаются значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = 10^{-1}$  (точки) и  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = 10^{-2}$  (пунктир).

В работах [103, 104] предлагается, что ПЧД, накопившиеся в центре нашей Галактики в результате гравитационной кластеризации, приводят к появлению наблюдаемой 511-кэВной фотонной линии из Галактического Центра (ГЦ) [105, 106]. Позитроны, испаренные ПЧД, аннигилируют с электронами межзвездного вещества, что обеспечивает наблюдаемый поток фотонов. Предполагая, что Солнечная Система лежит на расстоянии  $r_0 = 8.5$  кпк от ГЦ, полная скорость рождения позитронов в ГЦ должна быть около  $3 \times 10^{43}$  сек $^{-1}$ , а соответствующая масса накопившихся ПЧД должна быть  $\sim 10^{16} - 10^{17}$  г. Это было показано в [104] расчетом гамма-фона во внегалактическом пространстве и потока фотонов от испарения ПЧД из ГЦ, при этом утверждалось, что спектр масс ПЧД должен быть достаточно широким. Здесь мы покажем, что наше распределение (рис. 16,  $\Sigma = 3$ ) также годится для объяснения данного эффекта (о других возможных объяснениях, не связанных с ПЧД, см. обсуждение в [104]).

Предполагая, что распределение ПЧД по массам в Галактике не меняется по сравнению с начальным распределением, для распределения масс ПЧД в ГЦ  $N_{BH}$  запишем

$$N_{BH}(M_{BH}) = C n_{BH}(M_{BH}), \quad (150)$$

где  $C$  определяется полной массой накопившихся ПЧД:

$$\int N_{BH}(M_{BH}) M_{BH} dM_{BH} = M_{tot}. \quad (151)$$

Поток гамма-квантов на поверхности Земли, даваемый этими ПЧД,

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma dS dt} = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int N_{BH}(M_{BH}) \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma dt}(M_{BH}, E_\gamma) dM_{BH}, \quad (152)$$



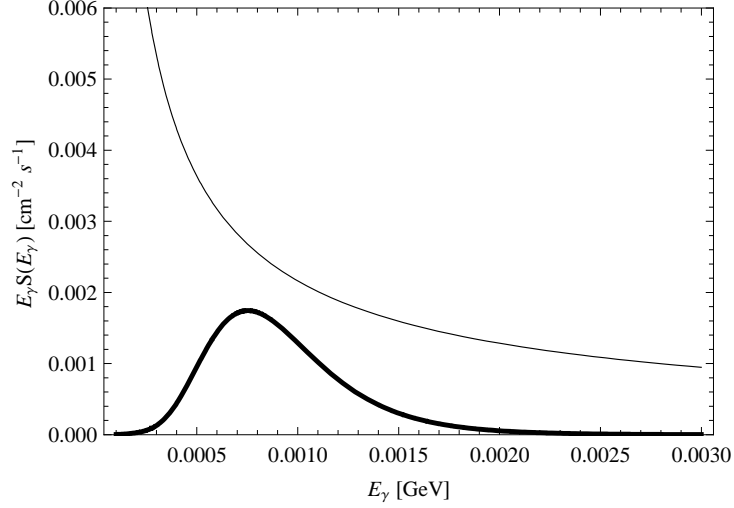


Рис. 23: Толстая линия - поток гамма-квантов от ПЧД, накопившихся в Галактическом Центре, предполагая, что их полная масса  $10^9 M_\odot$ , а распределение по массам - то же, что на рис. 16 ( $\Sigma = 3$ ). Тонкой линией показан измеренный фоновый поток.

а скорость рождения позитронов в ГЦ

$$\frac{dN_{e^+}}{dt} = \int \int N_{BH}(M_{BH}) \frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+} dt}(M_{BH}, E_{e^+}) dM_{BH} dE_{e^+}. \quad (153)$$

Необходимая для объяснения явления полная масса ПЧД может быть выражена через наблюдаемую скорость рождения позитронов и начальный спектр масс как

$$M_{tot} = \frac{\frac{dN_{e^+}}{dt} \times \int n_{BH}(M_{BH}) M_{BH} dM_{BH}}{\int n_{BH}(M_{BH}) \frac{dN_{e^+}}{dE_{e^+} dt}(M_{BH}, E_{e^+}) dE_{e^+} dM_{BH}}. \quad (154)$$

В нашем случае, было получено  $M_{tot} \approx 10^9 M_\odot$ . Если эти черные дыры однородно распределены в сферической области радиуса  $r \sim 600$  пк, необ-

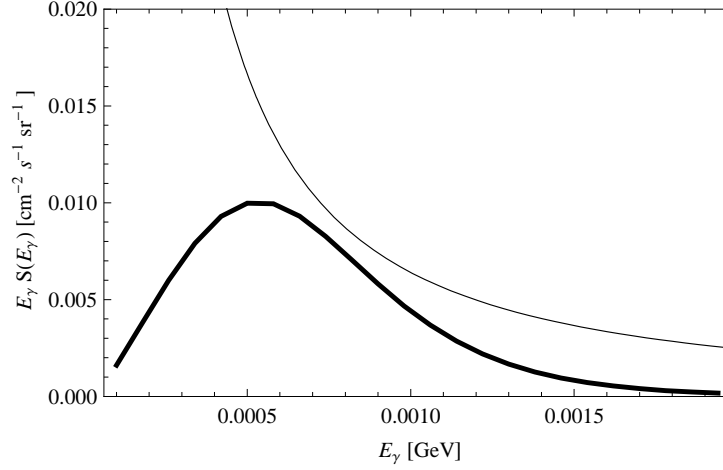


Рис. 24: Диффузный фон гамма квантов, образованный ПЧД со спектром масс, показанным на рис. 16 ( $\Sigma = 3$ ) (толстая линия) и измеренный внегалактический фон (тонкая линия).

ходимый для этого фактор кластеризации равен

$$\zeta \approx \frac{M_{tot}}{\frac{4}{3}\pi r^3 \Omega_{PBH} \rho_c} \approx 3 \times 10^7. \quad (155)$$

Поток гамма квантов от таких ПЧД, рассчитанный по формуле (152), показан на рис. 23, вместе с фоновым потоком, примерно равным [104, 106]

$$\frac{d\Phi_{cont}}{dE_\gamma} \approx 7 \text{ GeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \left( \frac{E_\gamma}{511 \text{ keV}} \right)^{-1.75}. \quad (156)$$

Видно, что поток фотонов от ПЧД не превышает наблюдаемый.

Расчет диффузного внегалактического фона в данном случае может быть произведен с использованием общей формулы (138), которая, однако, может быть упрощена, т.к. для ПЧД массой существенно больше  $M_*$ , как в нашем случае, хорошо работает приближение  $M_{BH}(t) \approx \text{const}$  и величиной  $3\alpha t$  можно пренебречь. Кластеризация ПЧД, очевидно, не важна для

расчета внегалактического потока, зависящего только от средней концентрации ПЧД. Учет поглощения излучения также не нужен, т.к. работают красные смещения порядка единицы.

Результат для диффузного фона фотонов от ПЧД со спектром масс, соответствующим рис. 16 ( $\Sigma = 3$ ) показан на рис. 24. Видно, опять-таки, что экспериментально измеренный поток [98, 104]

$$\frac{d\Phi_{\text{extra}}}{dE_\gamma} \approx 6.4 \text{ GeV}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1} \left( \frac{E_\gamma}{1 \text{ MeV}} \right)^{-2.38}, \quad (157)$$

не превышен.

Таким образом, ПЧД не только позволяют объяснить наличие темной материи во Вселенной, но и, возможно, появление аномально большого количества аннигилирующих позитронов в ГЦ. Понятно, что имеющихся данных пока недостаточно, чтобы предпочесть такую модель другим возможностям. Для этого желательно было бы иметь еще какие-то свидетельства в пользу существования ПЧД, в идеале - независимый метод измерения их средней концентрации. В следующей главе мы покажем, что такая возможность есть, и она не так уж невероятна.

# Глава 3. Первичные черные дыры и фон индуцированных гравитационных волн

## 3.1 Фон гравитационных волн и его возможные источники

В соответствии с одним из важных предсказаний ОТО, современная Вселенная заполнена диффузным фоном гравитационных волн, образованным источниками космологического и астрофизического происхождения (см. обзоры [107, 108, 109]). Этот стохастический фон характеризуется спектром  $\mathcal{P}_h$ , даваемым стандартным выражением

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\tau)h_{\mathbf{k}'}(\tau) \rangle = \frac{1}{2} \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathcal{P}_h(k, \tau), \quad (158)$$

где  $h_{\mathbf{k}}(\tau)$  - Фурье-компонента тензорного возмущения метрики,

$$h_{ij}(x, \tau) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [h_{\mathbf{k}}(\tau)e_{ij}(\mathbf{k}) + \bar{h}_{\mathbf{k}}(\tau)\bar{e}_{ij}(\mathbf{k})], \quad (159)$$

$e_{ij}(\mathbf{k})$  и  $\bar{e}_{ij}(\mathbf{k})$  - поляризационные тензоры, соответствующие волновому числу  $\mathbf{k}$ . Связь спектра ГВ с долей их плотности во Вселенной, на логарифмический интервал  $k$ , дается выражением (строго говоря, верным только при  $k \gtrsim aH$ )

$$\Omega_{GW}(k, t) = \frac{k}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{dk} = \frac{1}{12} \frac{k^2}{(aH)^2} \mathcal{P}_h(k, t). \quad (160)$$

Приведем небольшой обзор возможных механизмов рождения фона ГВ во Вселенной.

### 3.1.1 Генерация гравитационных волн во время инфляции

В работе [51] впервые было показано, что де Ситтеровская фаза расширения в ранней Вселенной естественным образом приводит к рождению фона ГВ с масштабно-инвариантным спектром  $\mathcal{P}_h(k)$ . Механизмом появления фона является усиление [110] квантовых флуктуаций метрики. Таким образом, инфляция является одним из наиболее интересных источников космологических ГВ [111, 112, 113, 114].

В однополевой инфляционной модели расчет спектра  $\mathcal{P}_h$  может быть проведен численно, аналогично расчету спектра возмущений кривизны  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  (Глава 1). Решается уравнение [64]

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_k = 0, \quad \frac{a''}{a} = 2a^2 H^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right), \quad (161)$$

с начальным условием  $v \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}$  под горизонтом. За горизонтом, т.е. при  $k \ll aH$ , величина  $v/a \sim h$  "замерзает". Спектр гравитационных волн равен

$$\mathcal{P}_h(k) = 2 \frac{32\pi}{m_{Pl}^2} \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k(\tau_e)}{a(\tau_e)} \right|^2. \quad (162)$$

В приближении "медленного скатывания",  $v \approx 1/\sqrt{2k}$ , вычисляем  $\mathcal{P}_h(k)$  в момент  $k = aH$  и получается известный приближительный результат

$$\mathcal{P}_h(k) \approx \frac{16}{\pi} \frac{H^2}{m_{Pl}^2} \Big|_{k=aH}. \quad (163)$$

Известно, что для гравитационных волн нет эффекта усиления амплитуды возмущений при нарушении "медленного скатывания" [64]. Таким образом, если в результате такого усиления в спектре  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  появляется выброс большой амплитуды, в спектре инфляционных ГВ  $\mathcal{P}_h(k)$  его не будет.

На самом деле, спектр  $\mathcal{P}_h$  - функция времени, и выражается через свое начальное значение с помощью передаточной функции. Приближенно, считая что после захода под горизонт  $\mathcal{P}_h \sim a^{-2}$ , а за горизонтом  $\mathcal{P}_h \sim \text{const}$ , можно записать:

$$\mathcal{P}_h(k, t) = \mathcal{P}_h^i(k) \left( \frac{a_k}{a(t)} \right)^2. \quad (164)$$

Далее, момент захода под горизонт  $a_k = a_{eq}(k_{eq}/k)$  для  $k > k_{eq}$  (мода заходит под горизонт в эпоху доминирования излучения) или  $a_k = a_{eq}(k_{eq}/k)^2$ , для  $k \leq k_{eq}$  (мода заходит в эпоху доминирования вещества). Тогда, с учетом (96), получаем (для  $t = t_0$  и  $a = a_0 = 1$ ):

$$\Omega_{GW}^0(k) \cong \frac{1}{12} \mathcal{P}_h^i(k, t) \times 2\Omega_R, \quad k > k_{eq}, \quad (165)$$

$$\Omega_{GW}^0(k) \cong \frac{1}{12} \left( \frac{k_{eq}}{k} \right)^2 \mathcal{P}_h^i(k, t) \times 2\Omega_R, \quad k \leq k_{eq}. \quad (166)$$

Для  $k > k_{eq}$ , переписывая  $\Omega_{GW}^{inf}$  через энергетический масштаб инфляции, получается [51, 115]

$$\Omega_{GW}^{inf}(k)h^2 \cong \Omega_r h^2 \frac{16}{9} \left( \frac{V_{inf}}{m_{Pl}^4} \right) \left( \frac{g_0}{g_*} \right)^{1/3}. \quad (167)$$

Из данных WMAP,  $V_{inf}^{1/4} < 3.4 \times 10^{16}$  ГэВ, и  $\Omega_{GW}^{inf}h^2 < 2 \times 10^{-15}$  для  $f > 10^{-16}$  Гц [116]. То есть, инфляционный фон ГВ зависит от энергетического масштаба инфляции; если  $V_{inf}^{1/4}$  существенно меньше  $\sim 10^{15}$  ГэВ, обнаружить этот фон, по-видимому, не удастся.

### 3.1.2 Модели прехитинга

В таких моделях, пиковое значение  $\Omega_{GW}$  оценивается по формуле [117, 118]

$$\Omega_{GW}^{pr}(k_{peak})h^2 = \Omega_r h^2 \frac{\mu^2}{g^2 m_{Pl}^2} \left( \frac{g_0}{g_*} \right)^{1/3}. \quad (168)$$

Предполагается, что инфляционный потенциал в конце инфляции имеет вид

$$V_{inf}(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2, \quad (169)$$

где  $\mu$  - эффективная масса [118] и частота осцилляций поля  $\phi$ ,  $g$  - константа связи. Энергетический масштаб инфляции  $V_{inf}^{1/4} \sim \sqrt{\mu m_{Pl}}$ , функция Хаббла  $H_e = m_{Pl}^{-1} \sqrt{V_{inf}} \sim \mu$ , а частота, соответствующая предсказываемому пику в спектре, равна

$$f_{peak} \approx 6 \times 10^{10} \sqrt{\frac{H_e}{M_P}} \text{Hz} \approx 6 \times 10^{10} \sqrt{\frac{\mu}{M_P}} \text{Hz}. \quad (170)$$

Если  $\mu$  очень мало,  $\mu \sim 10^{-18} m_{Pl}$ , то  $f_{peak} \approx 200$  Гц, т.е. пик находится в области, исследуемой наземными детекторами. В этом случае, однако,  $g^2$  крайне мало, порядка  $10^{-30}$ . В стандартных моделях хаотической инфляции параметр  $\mu$  не является свободным,  $\mu \sim 10^{-6} m_{Pl}$ , и пиковая частота  $\sim 10^8$  Гц.

Предсказания моделей гибридной инфляции более оптимистичны [119, 120, 121]. В частности, было показано, что фон ГВ может быть достаточно большим в области частот, важной для экспериментов LIGO ( $f \sim 100$  Гц) и VBO ( $f \sim 0.1$  Гц). Для случая  $g^2/\lambda \ll 1$  предсказание работы [120] выглядит как

$$f_{peak} \approx \frac{g}{\sqrt{\lambda}} \lambda^{1/4} 10^{10.25} \text{Hz}, \quad (171)$$

$$h^2\Omega_{GW} \ll 10^{-8.1} \left(\frac{\lambda}{g^2}\right)^{0.1}. \quad (172)$$

Здесь  $\lambda$  и  $g$  - параметры инфляционного потенциала. Например, для  $\lambda \sim 0.1$ ,  $f_{peak} \lesssim 10^3$  Гц,  $g^2 \lesssim 10^{-15}$  получается  $h^2\Omega_{GW} \lesssim 10^{-6}$ .

В суперсимметричных инфляционных моделях ГВ могут возникать также как результат взрывного распада конденсатов плоских направлений [122]. Характерные частоты этих ГВ находятся в области Гц-кГц, а амплитуда может быть достаточно большой,  $h^2\Omega_{GW} \sim 10^{-6}$ .

### 3.1.3 Фазовые переходы первого рода в ранней Вселенной

В этих моделях пиковая частота дается выражением [123]

$$f_{peak} \approx 6 \times 10^{-3} \text{mHz} \left(\frac{g_*}{100}\right)^{1/6} \left(\frac{T_*}{100 \text{ GeV}}\right) \frac{f_*}{H_*}. \quad (173)$$

Здесь  $H_*$  - функция Хаббла в момент образования ГВ,  $f_*$  - их характерная частота,  $T_*$  - температура в момент фазового перехода. Обычно,  $f_*/H_* \sim 10^2$  [123], и  $f_{peak} \sim 10^{-3}$  Гц, если  $T_* \sim 100$  ГэВ и  $f_{peak} \sim 10^2$  Гц, если  $T_* \sim 10^7$  ГэВ.

Плотность энергии ГВ в пике [123]

$$\Omega_{GW}^{tr}(f_{peak})h^2 \approx 10^{-5} \left(\frac{100}{g_*}\right)^{1/3} \left(\frac{H_*}{f_*}\right)^2, \quad (174)$$

т.е.,  $\Omega_{GW}^{tr}(f_{peak}) \sim 10^{-9}$ .



### 3.1.4 Космические струны

В этом сценарии, оценка доли плотности энергии ГВ дается формулой [124] (в высокочастотном пределе,  $f \gg 10^{-4}$  Hz)

$$\Omega_{GW}^{str} \sim 10^{-8} \left( \frac{G\mu}{10^{-9}} \right)^{1/2} \left( \frac{\gamma}{50} \right)^{1/2} \left( \frac{\alpha}{0.1} \right)^{1/2}. \quad (175)$$

Здесь  $G\mu$  - “натяжение” струны,  $\gamma$  - эффективность излучения,  $\alpha$  - начальный размер петли как доля хаббловского радиуса. Данные из наблюдений пульсаров ограничивают  $\Omega_{GW}^{str}(f)$  при  $f \sim 10^{-8}$  Гц, в соответствии с этим ограничением [125], при высоких частотах

$$\Omega_{GW}^{str} \lesssim 10^{-8}. \quad (176)$$

### 3.1.5 Сценарии “до большого взрыва”

В струнной космологии (которая является теоретической основой данных сценариев [126]), спектр ГВ растет с частотой, и его максимальное значение определяется параметром  $M_s/M_P$  (где  $M_s$  - масса фундаментальной струны). В соответствии с анализом [127], оценка для максимальной доли плотности ГВ есть

$$\Omega_{GW}^{pbb,max} < \Omega_\gamma \left( \frac{M_s}{M_P} \right)^2 \lesssim 10^{-6}. \quad (177)$$

Это максимальное значение достигается при  $f \sim 100$  ГГц, т.е., в области очень высоких частот. Однако, возможны неминимальные варианты этого сценария [127], в которых максимум сдвигается в область меньших частот, без изменения амплитуды пика (например, в область  $f \sim 10^2$  Гц).

### 3.1.6 Модели мира на бране

В таких моделях предполагается, что наш мир является “браной” (т. е., четырехмерной гиперповерхностью), находящейся в пространстве высшей размерности, и вводятся новые геометрические степени свободы (например, положение браны, и др.) Возмущения этих степеней свободы могут приводить, в принципе, к поддающемуся регистрации ГВ-излучению. Характерные частоты зависят в этом случае от размера дополнительных измерений [128].

### 3.1.7 Испарение первичных черных дыр

Фон ГВ достаточно высоких частот обязательно образуется и при испарении ПЧД малых масс, если они рождались в ранней Вселенной [44, 129]. Возникновение этого фона аналогично фону фотонов и нейтрино от испарений ПЧД, рассмотренному нами в Главе 2. Величина  $\Omega_{GW}$  зависит от концентрации и характерной массы рождающихся ПЧД, характерные частоты находятся в области  $\sim 10^{12}$  Гц и более.

## 3.2 Генерация индуцированных гравитационных волн

Кроме рассмотренных в предыдущем разделе механизмов образования ГВ фона, существует еще один - ГВ-фон генерируется скалярными возмущениями в радиационную эпоху. В первом порядке космологической теории возмущений тензорные и скалярные возмущения эволюционируют независимо, но это уже не так в высших порядках. Конкретно, уже во втором порядке скалярные возмущения метрики, в результате взаимодействия раз-

ных мод, генерируют тензорные моды. Вклад второго порядка в тензорный спектр,  $h_{ij}^{(2)}$ , зависит квадратично от скалярных возмущений метрики первого порядка, т.е. наблюдаемый спектр скалярных возмущений является источником вторичных гравитационных волн. Другими словами, стохастический спектр ГВ второго порядка индуцируется скалярными возмущениями первого порядка [130, 131, 132, 133, 46].

Особенностью данного механизма является то, что он является гарантированным - если верны уравнения Эйнштейна, то из наличия скалярных возмущений обязательно следует появление индуцированного ГВ-фона.

### 3.2.1 Связь частоты с массой горизонта

Приближенно можно считать [133], что индуцированные ГВ частоты  $f$  (соответствующие сопутствующему волновому числу  $k$ ) рождаются около момента пересечения горизонта модой с этим волновым числом. Данному моменту времени соответствует масса горизонта  $M_h$ . Получим связь между этими величинами.

Флуктуации с сопутствующей длиной волны  $\lambda$  и волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$  соответствует, для волн, распространяющихся со скоростью света, частота  $f = c/\lambda$ , или

$$f = \frac{ck}{2\pi} = 1.54 \times 10^{-15} \left( \frac{k}{\text{Mpc}^{-1}} \right) \text{Hz}. \quad (178)$$

Плотность энтропии  $s = (p + \rho)/T$ ,  $p \sim \rho \sim gT^4$ . В сопутствующем объеме энтропия сохраняется, отсюда следует что

$$a \sim g^{-1/3} T^{-1}. \quad (179)$$

Из уравнения Фрийдмана  $H^2 \sim \rho$ , поэтому

$$aH \sim a^{-1}g^{-1/6}, \quad (180)$$

а масса горизонта

$$M_h \sim (H^{-1})^3 \rho \sim a^2 g^{1/6}, \quad (181)$$

значит,

$$g^{1/6} M_h (aH)^2 = \text{const.} \quad (182)$$

Считая, что это верно вплоть до момента эквивалентности (в этот момент масса горизонта равна  $M_{eq}$ ), для  $k = aH$  запишем

$$k = k_{eq} \left( \frac{M_h}{M_{eq}} \right)^{-1/2} \left( \frac{g}{g_{eq}} \right)^{-1/12} \approx 2 \times 10^{23} (M_h[\text{g}])^{-1/2} \text{ Мpc}^{-1}, \quad (183)$$

где мы подставили  $g_{eq} \approx 3$ ,  $g \approx 100$ ,  $k_{eq}$  дается (96),

$$M_{eq} = 1.3 \times 10^{49} \text{ г} \cdot (\Omega_m h^2)^{-2} \approx 8 \times 10^{50} \text{ г}. \quad (184)$$

Численная связь  $f$  с  $M_h$  тогда получается в виде:

$$f = 3 \times 10^8 \text{ Hz} (M_h/1\text{г})^{-1/2}; \quad M_h \approx \frac{9 \times 10^{16} \text{ г}}{(f/1 \text{ Hz})^2}. \quad (185)$$

Масса горизонта, соответствующая частоте наилучшей чувствительности наземного интерферометра LIGO ( $\sim 100$  Гц [134, 135]), равна  $M_h(100 \text{ Гц}) \approx 10^{13}$  г. Наибольшая чувствительность, таким образом, ожидается для ГВ, соответствующих массам горизонта (и ПЧД)  $\sim 10^{13}$  г.

### 3.2.2 Вычисление спектра гравитационных волн

Компоненты метрики Фридмана-Робертсона-Уокера для случая плоской Вселенной равны

$$g_{00} = -a^2(1 + 2\Phi), \quad (186)$$

$$g_{0i} = a^2(\partial_i\omega + \omega_i), \quad (187)$$

$$g_{ij} = a^2 \left[ (1 - 2\Psi)\delta_{ij} + D_{ij}h + \partial_i h_j + \partial_j h_i + \frac{1}{2}h_{ij} \right]. \quad (188)$$

Для вывода уравнений движения тензорных возмущений второго порядка удобно использовать обобщенную продольную калибровку, определенную соотношениями

$$\omega^{(1)} = h^{(1)} = h_i^{(1)} = 0. \quad (189)$$

Кроме того, следуя [133], мы пренебрегаем векторными и тензорными возмущениями первого порядка:

$$\omega_i^{(1)} = h_{ij}^{(1)} = 0. \quad (190)$$

В этом приближении, компоненты тензора Эйнштейна второго порядка,  $G_j^{i(2)}$ , зависят только от возмущений первого порядка  $\Phi^{(1)}$ ,  $\Psi^{(1)}$  и возмущений второго порядка  $\Phi^{(2)}$ ,  $\Psi^{(2)}$ ,  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega_i^{(2)}$ ,  $h^{(2)}$ ,  $h_i^{(2)}$  и  $h_{ij}^{(2)}$ . Пренебрегая анизотропными напряжениями (в этом случае  $\Phi = \Psi$ ), тензор энергии-импульса второго порядка равен

$$T_j^{i(2)} = \frac{1}{2}w\delta^{(2)}(\rho)\delta_j^i + \rho^{(0)}(1 + w)v_{(1)}^i v_j^{(1)}. \quad (191)$$

Здесь  $v_{(1)}^i$  соответствует соленоидальной части возмущения скорости первого порядка,

$$v_i^{(1)} = -\frac{2}{3\mathcal{H}^2(1 + w)}\partial_i \left( \Psi^{(1)'} + \mathcal{H}\Psi^{(1)} \right), \quad (192)$$

где  $\mathcal{H} = aH$  и  $w = p^{(0)}/\rho^{(0)}$ . Уравнения Эйнштейна для поперечной бесследовой части имеет вид

$$\left[ G_i^{j(2)} \right]^{TT} = 8\pi G \left[ T_i^{j(2)} \right]^{TT}. \quad (193)$$

Из него следует уравнение эволюции для тензорных возмущений второго порядка, содержащее, в качестве члена с источником, только скалярные возмущения первого порядка (остальные возмущения уходят благодаря выделению поперечной бесследовой части [132, 133], что можно проверить прямым вычислением):

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = -4 \left[ 4\Psi\partial_i\partial_j\Psi + 2\partial_i\Psi\partial_j\Psi - \frac{4}{3(1+w)\mathcal{H}^2}\partial_i(\Psi' + \mathcal{H}\Psi)\partial_j(\Psi' + \mathcal{H}\Psi) \right]^{TT}. \quad (194)$$

В последнем уравнении мы опустили индексы:  $\Psi^{(1)} \rightarrow \Psi$ ,  $h_{ij}^{(2)} \rightarrow h_{ij}$ .

В соответствии с [133], спектр гравитационных волн второго порядка вычисляется по формуле:

$$\mathcal{P}_h(k, \tau) = \int_0^\infty d\tilde{k} \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{P}_\Psi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|) \mathcal{P}_\Psi(\tilde{k}) \mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu, \tau), \quad (195)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(k, \tilde{k}, \mu, \tau) &= \frac{(1 - \mu^2)^2}{a^2(\tau)} \frac{k^3 \tilde{k}^3}{|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|^3} \int_{\tau_0}^\tau d\tilde{\tau}_1 a(\tilde{\tau}_1) g_k(\tau, \tilde{\tau}_1) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\tau}_1) \times \\ &\times \int_{\tau_0}^\tau d\tilde{\tau}_2 a(\tilde{\tau}_2) g_k(\tau, \tilde{\tau}_2) \left[ f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\tau}_2) + f(\mathbf{k}, \mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\tau}_2) \right]. \end{aligned} \quad (196)$$

Здесь модуль разности векторов зависит от их абсолютных величин и косинуса угла между ними  $\mu$ :

$$|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}| = \sqrt{k^2 + \tilde{k}^2 - 2\mu k\tilde{k}}, \quad (197)$$

и функция  $f$  также зависит от модулей векторов и косинуса угла,

$$f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tau) = 12\Psi(\tilde{k}\tau)\Psi(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\tau) + 8\tau\Psi(\tilde{k}\tau)\Psi'(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\tau) + 4\tau^2\Psi'(\tilde{k}\tau)\Psi'(|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\tau), \quad (198)$$

причем косинус угла между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}$  равен

$$\mu_2 = \frac{k - \mu\tilde{k}}{\sqrt{k^2 + \tilde{k}^2 - 2\mu k\tilde{k}}}. \quad (199)$$

В уравнениях (195, 196, 198) используются следующие обозначения.  $\mathcal{P}_\Psi(k)$  - спектр мощности бардиновского потенциала, определенный в момент  $\tau = \tau'_i$  вскоре после начала радиационной эпохи (см. Главу 2). Этот первичный спектр определен как

$$\langle \Psi_{\mathbf{k}} \Psi_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \mathcal{P}_\Psi(k), \quad (200)$$

$\Psi_{\mathbf{k}}$  - Фурье-компонента  $\Psi$ ,

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \Psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (201)$$

Эволюционное уравнение для амплитуды ГВ

$$h''_{\mathbf{k}} + 2\mathcal{H}h'_{\mathbf{k}} + k^2 h_{\mathbf{k}} = S(\mathbf{k}, \tau), \quad (202)$$

где источник в правой части равен

$$S(\mathbf{k}, \tau) = \int d^3\tilde{\mathbf{k}} \tilde{k}^2 (1 - \mu^2) f(\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}, \tau) \Psi_{\mathbf{k}-\tilde{\mathbf{k}}} \Psi_{\tilde{\mathbf{k}}}. \quad (203)$$

Функция  $f$  в (198) содержит передаточные функции  $\Psi(k\tau)$ , определенные соотношением

$$\Psi(k\tau) = \frac{\Psi_k(\tau)}{\Psi_k}, \quad (204)$$

где  $\Psi_k \equiv \Psi_k(\tau'_i)$  - начальное значение потенциала.

Решение для потенциала в радиационную эпоху, с условием  $\Psi(\tau_i) = 0$ , есть [89]

$$\Psi_k(\tau, \mathcal{R}_k) = \frac{2\mathcal{R}_k}{x^3} [(x - x_i) \cos(x - x_i) - (1 + xx_i) \sin(x - x_i)] \quad (205)$$

( $x = k\tau/\sqrt{3}$ ). Выбор начального условия для  $\Psi(\tau_i)$  обусловлен теми же причинами, что обсуждались в Главе 2. В эпоху доминирования вещества,  $\Psi_k(\tau) = \text{const}$  на всех масштабах.

Как и в Главе 2, мы выбрали  $\tau'_i$  из условия  $\lg(\tau'_i/\tau_i) = 0.05$ , в результате чего бардиновский потенциал  $\Psi_k$  при  $\tau'_i$  намного меньше своего асимптотического значения  $\Psi_k = -(2/3)\mathcal{R}_k$ , которое достигается в режиме  $k \ll aH$  для  $k \ll k_{end} = \tau_i^{-1}$ . Если мы интересуемся только такими масштабами, для которых  $k \ll k_{end}$ , более удобно определить  $\mathcal{P}_\Psi$  в терминах его асимптотического значения (на масштабах больше размера горизонта). Чтобы отличить асимптотическое значение спектра  $\Psi$  от значения в момент  $\tau'_i$ , будем обозначать его как  $\tilde{\mathcal{P}}_\Psi$ . Для  $k \ll k_{end}$ , соотношение между двумя значениями очень просто:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\Psi = \kappa \mathcal{P}_\Psi; \quad \kappa = \left( \frac{\frac{2}{3}\mathcal{R}_k}{\Psi_k} \right)^2, \quad (206)$$

и  $\Psi_k = \Psi_k(\tau'_i, \mathcal{R}_k)$ . Для нашего выбора  $\tau'_i$ ,  $\kappa \approx 11.7$ .

Функция  $g_k(\tau, \tilde{\tau})$  в уравнении (196) - это функция Грина уравнения (202). В радиационную эпоху

$$g_k(\tau, \tilde{\tau}) = \frac{1}{k} \sin[k(\tau - \tilde{\tau})] \quad , \quad \tau < \tau_{eq}, \quad (207)$$



а в эпоху доминирования материи функция Грина выражается через функции Бесселя:

$$g_k(\tau, \tilde{\tau}) = -\frac{x\tilde{x}}{k} [j_1(x)y_1(\tilde{x}) - j_1(\tilde{x})y_1(x)], \quad x = k\tau, \quad \tau \geq \tau_{\text{eq}}, \quad (208)$$

$$j_1(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad y_1(x) = -\frac{1}{x} \left( \frac{\cos x}{x} + \sin x \right). \quad (209)$$

### 3.2.3 Случай $\delta$ -пики в спектре скалярных возмущений

В случае идеализированного спектра, в котором вся мощность заключена в одной моде,

$$\mathcal{P}_\Psi(k) = P_0 \delta \left( \ln \frac{k}{k_0} \right) = P_0 k_0 \delta(k - k_0), \quad (210)$$

задача расчета фона индуцированных ГВ сильно упрощается, т.к. снимаются оба интеграла в (195). В этом случае (он изучался в [132, 46]) получаем:

$$\mathcal{P}_h(k) = \frac{P_0^2 k_0^2}{k} \mathcal{F} \left( k, k_0, \frac{k}{2k_0}, \tau \right), \quad (211)$$

то есть  $\mu = k/2k_0$ . Т.к.  $\mu = \cos \theta \leq 1$ , то  $k \leq 2k_0$ , то есть ГВ от такого спектра генерируются в интервале от 0 до  $2k_0$ .

Заметим также, что соответствующее асимптотическое значение коэффициента при  $\delta$ -функции в (210) равно  $\tilde{P}_0 = \kappa P_0$ .

### 3.2.4 Расчет плотности энергии гравитационных волн

Плотность энергии гравитационных волн на логарифмический интервал  $k$ , в единицах критической плотности, дается выражением (160). Однако, для больших  $k$  прямой расчет спектра  $\mathcal{P}_h$  по формуле (195) представляется затруднительным, т.к. необходимо брать многомерный интеграл от

сильно осциллирующих функций (например, для  $k \sim 10^{16}$  Мпк $^{-1}$  это около  $\sim k\tau_0 \sim 10^{20}$  колебаний). К счастью, нет необходимости проводить численное интегрирование по времени до  $\tau_0$ . Достаточно посчитать  $\Omega_{GW}$  для некоторого момента времени  $\tau_{calc} \gg k^{-1}$ , при котором мода уже находится под горизонтом, и ГВ свободно распространяются. После этого можно легко связать плотности энергии ГВ в разные моменты времени, используя, что  $h_k \sim a^{-1}$  глубоко внутри горизонта. Действительно, предполагая нулевой член с источником в (202) и заменяя переменную на  $v_k = ah_k$ , получаем уравнение

$$v_k'' + v_k \left[ k^2 - a^2 H^2 \left( 2 - \frac{3}{2}(1+w) \right) \right] = 0, \quad (212)$$

где  $w = p/\rho$ . В режиме  $k \gg aH$  (под горизонтом), решение этого уравнения  $v_k \sim \cos(k\tau + \varphi)$ , и, не учитывая осцилляции,  $h_k \sim a^{-1}$  (см., например, [136]).

В работе [133] было замечено, однако, что распространение ГВ второго порядка в режиме  $k \gg aH$  не всегда можно рассматривать как свободное, так как источником в (202) в этом режиме не всегда можно пренебречь. Мы иллюстрируем этот эффект на рис. 25, на котором показана зависимость  $\mathcal{P}_h(a)$  для нескольких разных  $k$ . Расчет проведен численно с использованием уравнений (195, 208, 209), для примера был взят спектр скалярных возмущений в виде  $\delta$ -функции. Видно, что для достаточно больших  $k$  ( $k \gtrsim k_c \approx 100k_{eq} \approx 1$  Мпк $^{-1}$ ) этим эффектом можно пренебречь и считать что  $\mathcal{P}_h(a) \sim a^{-2}$ ; для меньших  $k$ , соответствующих модам, заходящим под горизонт не намного раньше момента  $\tau_{eq}$ , этот эффект важен. В данной работе мы интересуемся только ГВ с  $k \gg k_c$ .

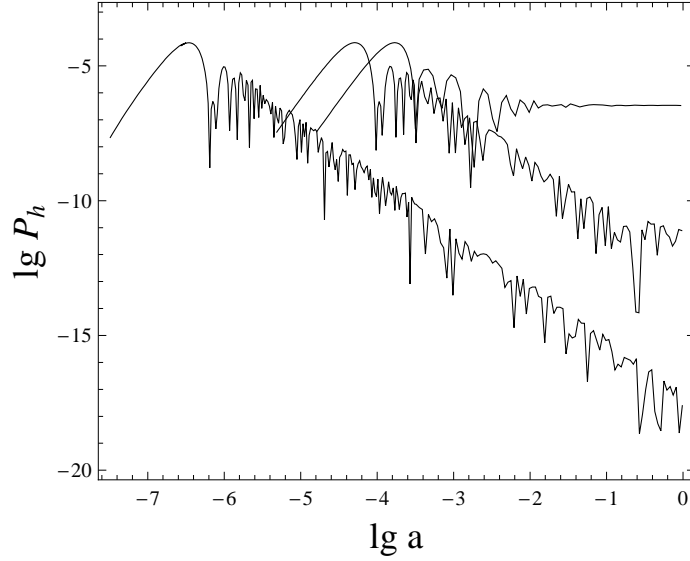


Рис. 25: Зависимость спектра гравитационных волн  $\mathcal{P}_h(k)$  от  $a$  для разных  $k$ . Для этого примера, спектр скалярных возмущений был взят в форме  $\delta$ -пики с  $\tilde{P}_0 = 10^{-3}$  во всех случаях; для кривых сверху вниз,  $k = k_0 = 6k_{eq}, 20k_{eq}, 3 \times 10^3 k_{eq}$ .

В радиационную эпоху,  $aH \sim a^{-1}g_*^{-1/6}$ , и считая  $\mathcal{P}_h \sim a^{-2}$ , получаем, что  $\Omega_{GW}(k, \tau) \sim \text{const} \times g_*^{1/3}$ . Связь между  $\Omega_{GW}$  в моменты  $\tau_{eq}$  и  $\tau_{calc}$  в этом случае

$$\Omega_{GW}^{eq}(k) = \Omega_{GW}^{calc}(k) \left( \frac{g_{*eq}}{g_{*calc}} \right)^{1/3}. \quad (213)$$

Гравитационные волны под горизонтом ведут себя как свободный газ релятивистских частиц, и их плотность меняется по тому же закону ( $\rho \sim a^{-4}$ ). Можно записать, по определению,

$$\rho_{GW}^0 = \Omega_{GW}^0 \cdot \rho_c, \quad (214)$$

$$\rho_{GW}^{eq} = \Omega_{GW}^{eq} \cdot \rho_{eq}. \quad (215)$$

Деля одно на другое и учитывая (96), получаем:

$$\Omega_{GW}^0(k) = 2\Omega_R \times \Omega_{GW}^{eq}(k). \quad (216)$$

Окончательно,

$$\Omega_{GW}^0(k) = 2\Omega_R \left( \frac{g_{*eq}}{g_{*calc}} \right)^{1/3} \times \frac{(k\tau_{calc})^2}{12} \mathcal{P}_h(k, \tau_{calc}). \quad (217)$$

Эта формула дает правильную плотность энергии - с точностью до осцилляций. Значение  $\tau_{calc}$  необходимо выбирать из условия  $\tau_{calc} \gg k^{-1}$ , причем, чем больше этот параметр, тем чаще осцилляции в  $\Omega_{GW}(k, \tau)$ , но огибающая (амплитуда колебаний), которая нас интересует, остается неизменной. Практически возможны варианты выбора - либо  $\tau_{calc}$  фиксирован, либо зависит от  $k$ , например, в последнем случае,

$$\tau_{calc} = N_{sub} \cdot k^{-1}, \quad N_{sub} \sim 100. \quad (218)$$

Последний вариант опасен тем, что обычно дает результат совсем без осцилляций, идущий то по верхам, то по низам колебаний реальной функции  $\Omega_{GW}$  и таким образом может дать неверное представление об амплитуде колебаний. Поэтому более удобным является выбор

$$\tau_{calc} = (N_{sub} + N_{rnd}) \cdot k^{-1}, \quad (219)$$

где  $N_{sub} = \text{const}$ , а  $N_{rnd}$  - случайное число в интервале  $[0, 2\pi]$ , вычисляемое заново для каждого  $k$ . Результат расчета  $\Omega_{GW}$  в этом случае представляет собой хаотически осциллирующую функцию, но с правильной амплитудой колебаний, которая нас и интересует. Эта аргументация проиллюстрирована на рисунке 26, где  $\Omega_{GW}$  рассчитана для случая  $\delta$ -функции в спектре, с

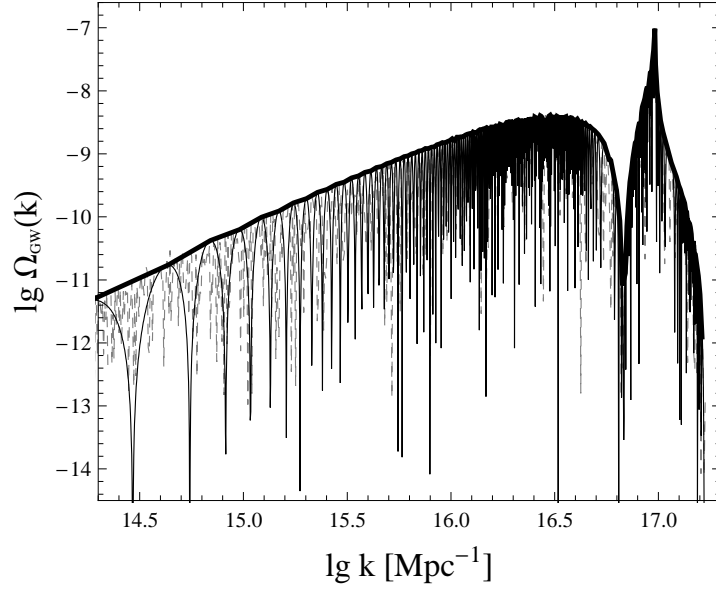


Рис. 26: Спектр гравитационных волн от  $\delta$ -пика в  $\mathcal{P}_\Psi$ .  $\tilde{P}_0 = 1.2 \times 10^{-3}$ ,  $k_0 = 8 \times 10^{16} \text{ Мпк}^{-1}$ . Сплошная тонкая линия - расчет с  $\tau_{calc} = 10^3 k_0^{-1}$ , пунктирная линия - расчет для  $\tau_{calc} = (50 + N_{\text{rnd}})k^{-1}$ . Толстая линия - огибающая.

использованием двух разных вариантов выбора  $\tau_{calc}$  (постоянное и зависящее от  $k$  значение). Видно, что огибающая одна и та же в обоих случаях.

Здесь стоит заметить, что в случае скалярного спектра в форме идеальной  $\delta$ -функции, для  $k = 2k_0/\sqrt{3}$  происходит логарифмическое усиление амплитуды колебаний со временем, даже при  $k\tau \gg 1$  [132]. Этот эффект возникает в результате “резонанса”, т.е. совпадения фаз колебаний при данном  $k$  у функций  $\Psi(k\tau)$  и  $g_k(\tau, \tilde{\tau})$ . Действительно,

$$g_k(\tau, \tilde{\tau}) \sim \sin(k\tau); \quad (220)$$

$$f \sim \frac{1}{\tau^n} \sin\left(\frac{\tilde{k}\tau}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(\frac{|\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}|\tau}{\sqrt{3}}\right) \sim \frac{1}{\tau^n} \sin^2\left(\frac{k_0\tau}{\sqrt{3}}\right) \quad (221)$$

(в каждом случае с точностью до фазы колебаний), и усиление при интегрировании в (196) возможно при условии

$$k\tau = 2\frac{k_0\tau}{\sqrt{3}}, \quad (222)$$

т.е., действительно, при  $k = 2k_0/\sqrt{3}$ .

Для реалистичных пиков ненулевой ширины этот эффект замывается начиная с определенного времени  $\tau \sim 1/\Delta k$ , что замечено в [46]. Для идеального  $\delta$ -пика интегрировать нужно до  $\tau_{eq}$ , т.к. при  $\tau > \tau_{eq}$  поведение обеих функций меняется. Кроме того, резонанс, вероятно, может быть нарушен учетом анизотропных напряжений (когда нарушается условие  $\Phi = \Psi$ ) и учетом изменения  $g_*$  со временем.

Как было показано в [132], ширина резонанса  $\sim (k\tau)^{-1}$ , а высота пика  $\sim \ln^2(k\tau)$ . Таким образом, вклад в спектр мощности очень мало меняется с ростом  $k\tau$  даже для идеальной  $\delta$ -функции.

### 3.3 Пик конечной ширины

#### 3.3.1 Зависимость от ширины пика

Для изучения случая, когда спектр скалярных возмущений имеет пик конечной ширины, мы используем параметризацию спектра возмущений кривизны с пиком (133), ранее предложенную и использованную в работе. Напомним, что основными параметрами нашей аппроксимации являются  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  - высота пика,  $k_0$  - положение максимума, и  $\Sigma$  - ширина спектра.

Для одного и того же  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$ , но разных ширин  $\Sigma$ , спектр индуцированных ГВ представлен на рис. 27. Из него хорошо видно, как с увеличением шири-

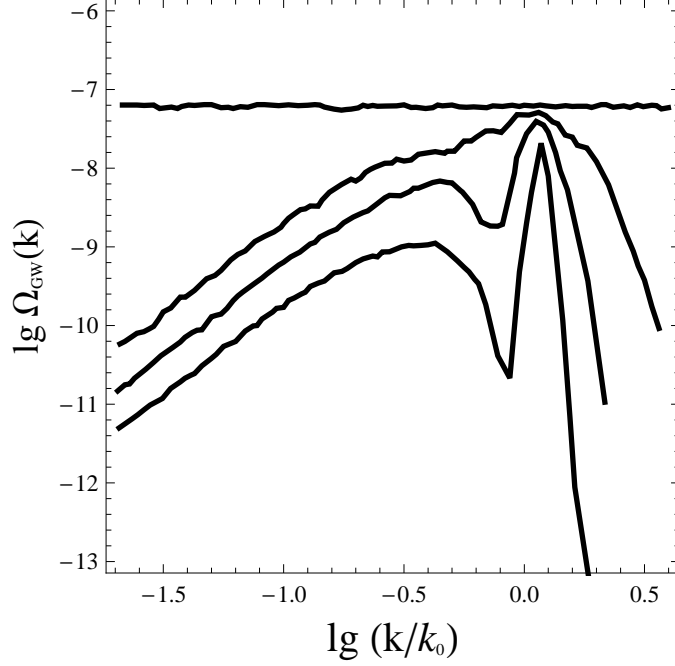


Рис. 27: Расчет  $\Omega_{GW}$  для пиков разной ширины (снизу вверх показаны расчеты для  $\Sigma = 0.1, 0.3, 0.8$  и  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.01$ ; верхняя кривая -  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \text{const} = 0.01$ ). Расчет сделан в предположении  $g_*(k_0) \approx 100$ .

ны спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  расширяется и спектр  $\Omega_{GW}(k)$ . Узкий спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  дает спектр ГВ, соответствующий ожиданию от  $\delta$ -пика. Форма спектра сглаживается с увеличением ширины и он оказывается масштабно-инвариантным для масштабно-инвариантного спектра на входе. Максимальная величина, которой достигает  $\Omega_{GW}(k)$ , пропорциональна  $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0)^2$  и, как видно из рисунка, мало меняется с увеличением ширины.

Максимальное значение  $\Omega_{GW}$  (достигаемое при  $k \approx k_0$ ) оказывается равным

$$\Omega_{GW}^{max} \approx \Omega_{GW}(k_0, \tau_0) \cong 0.002 \left( \frac{g_{*eq}}{g_*} \right)^{1/3} \cdot (\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0)^2. \quad (223)$$

Из этой формулы следует, что для получения большого фона вторичных

ГВ необходимо, чтобы  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  достигал достаточно больших значений на некотором масштабе. На малых масштабах значение  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  ограничено только изучением рождения ПЧД, и может достигать значений, гораздо больших, чем его величина на космологических масштабах  $\sim 10^{-9}$ . Например, если  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim 10^{-2}$ , то получаем  $\Omega_{GW} \sim 10^{-7}$  - гораздо больше максимального предсказания инфляционных моделей, где  $\Omega_{GW} \lesssim 10^{-15}$ .

Заметим, что форма кривых, показанных на рис. 27, зависит лишь от отношения  $k/k_0$  при прочих одинаковых параметрах и  $k, k_0 \ll k_{end}$ . Это видно из (195, 196): если мы изменим  $k$  (и  $\tilde{k}$ ) в постоянное число раз  $\alpha$  (так что  $k \rightarrow \alpha k$ ,  $\tilde{k} \rightarrow \alpha \tilde{k}$ , и  $\mathcal{P}_{\Psi}(k) \rightarrow \mathcal{P}_{\Psi}(\alpha k)$ ), и сделаем соответствующий сдвиг времени  $\tau_{calc} \rightarrow \alpha^{-1} \tau_{calc}$  (так что  $k\tau_{calc}$  не меняется), то функции, входящие в (196) меняются следующим образом:

$$g \sim \frac{1}{k} \sin(k\tau) \sim \frac{1}{\alpha}; \quad f \sim \Psi^2(k\tau) \sim 1; \quad \mathcal{F} \sim k^3 (d\tau)^2 g^2 f^2 \sim \frac{1}{\alpha} \quad (224)$$

(изменение пределов интегрирования по  $\tau$  не влияет на результат в случае  $\tau_0 \ll k^{-1}$ ). Используя (224) и (195), получаем, что

$$\mathcal{P}_h(k, \tau_{calc}) \sim \int dk \int d\mu \mathcal{P}_{\Psi} \mathcal{P}_{\Psi} \mathcal{F} \sim \alpha^0, \quad (225)$$

так что  $\mathcal{P}_h$ , и, соответственно,  $\Omega_{GW}$  не меняются в расчетный момент времени  $\tau_{calc}$ , а значит, имеют те же значения после сдвига  $k$  потому что, как мы видели, реальный спектр ГВ не зависит от  $\tau_{calc}$  (если только  $\tau_{calc} \gg k^{-1}$ ).

### 3.3.2 Сравнение с возможностями эксперимента

Возможные параметры спектра вида (133) были ограничены в Главе 2 этой работы. Для  $k$ , соответствующему массе горизонта  $\sim 10^{13}$  г, ограниче-



ния на возможную высоту пика составляют (для  $\Sigma = 3$ ) около  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.016$  (в случае стандартного коллапса,  $\delta_c = 1/3$ ) и  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.032$  (для критического коллапса, когда было принято  $\delta_c = 0.45$ ). Наиболее оптимистичный возможный сигнал получается во втором случае, оценка по формуле (223) дает

$$\Omega_{GW} \approx 0.002 \times (3/100)^{1/3} \times 0.032^2 \approx 6 \times 10^{-7}. \quad (226)$$

Численный расчет фона ГВ в этом случае приведен на рис. 28. Там же показаны пределы, полученные наземным интерферометром LIGO. В

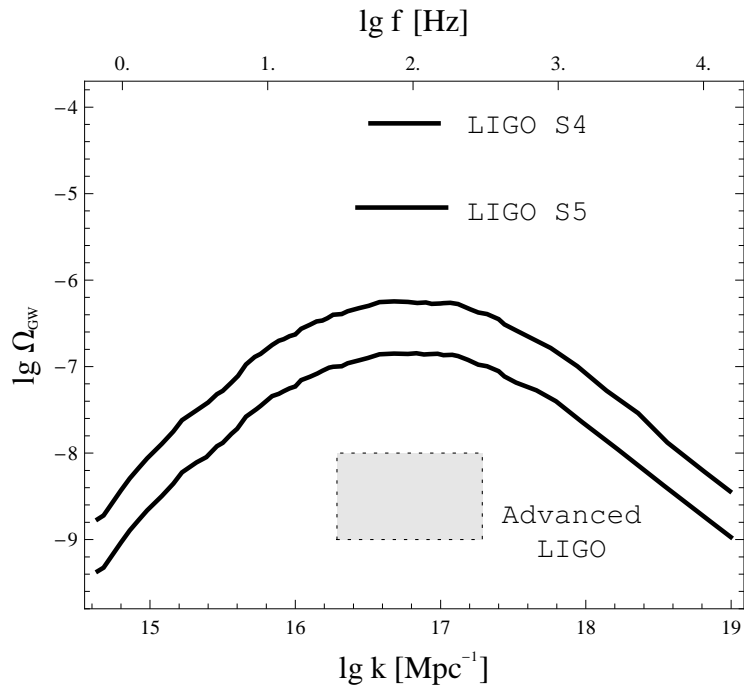


Рис. 28: Расчет  $\Omega_{GW}$ , индуцированной скалярными возмущениями с пиком при  $f_0 = 100$  Гц ширины  $\Sigma = 3$  и высоты  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.032$  (верхняя кривая) и  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0 = 0.016$  (нижняя кривая). Также показаны пределы LIGO S4 и S5, и ожидаемая конечная чувствительность Advanced LIGO (с учетом неопределенностей).

течение пятого научного запуска LIGO (S5), было получено [135]

$$\Omega_{GW} < 6.9 \times 10^{-6}. \quad (227)$$

Этот предел относится к масштабнo-инвариантному спектру ГВ в интервале частот 41.5 – 169.25 Гц. Предыдущий предел (S4) был примерно на порядок слабее [134],

$$\Omega_{GW} < 6.5 \times 10^{-5}, \quad (228)$$

для интервала частот 51 – 150 Гц. Цель эксперимента Advanced LIGO - достичь чувствительности  $\Omega_{GW} \sim 10^{-8} - 10^{-9}$  [134], она также показана на рисунке 28. Видно, что такой чувствительности хватит для установки более сильных пределов на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  и концентрацию ПЧД (в данном диапазоне масс и  $k$ ), чем имеются сегодня - если, конечно, фон ГВ в этом эксперименте не будет обнаружен.

### 3.4 Максимально возможный фон индуцированных гравитационных волн

В предыдущем разделе мы видели, что максимальные предсказываемые значения для фона индуцированных ГВ достаточно близки к возможностям уже существующих установок (см. рис. 28). Естественно предположить поэтому, что поиск ГВ сможет в будущем использоваться для получения информации о спектре скалярных возмущений на малых масштабах [47]. На сегодняшний день, однако, фон ГВ не обнаружен, поэтому, наоборот, ограничения на спектр скалярных возмущений, известные из изучения

рождения ПЧД в ранней Вселенной, могут использоваться для того, чтобы оценить максимальные возможные значения фона индуцированных ГВ.

В частности, кривые, показанные на рис. 28, являются в этом смысле максимальными - фон индуцированных ГВ при  $f \sim 100$  Гц не может быть больше, чем показанные значения, не входя в противоречие с данными по ПЧД. Для других частот, при наличии предела на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ , ограничение на  $\Omega_{GW}$  легко получить из формулы (223).

Здесь мы получим ограничения на  $\Omega_{GW}$  для  $f \sim 10^3 - 10^{-3}$  Гц, что соответствует массам ПЧД (и горизонта)  $\sim 10^{11} - 10^{23}$  г. Для достаточно широкого пика ( $\Sigma \gtrsim 1$ ), ограничения на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  в этой области масштабов находятся в области  $0.01 - 0.04$ , в зависимости от  $k$  и параметра  $\delta_c$ .

Для диапазона масс ПЧД  $\sim 10^{13} - 10^{17}$  г, как мы видели в Главе 2, лучшие ограничения получаются из наблюдений диффузного фона гамма-квантов; при  $M_{BH} \gtrsim 10^{17}$  г они следуют из требования, чтобы доля плотности Вселенной в ПЧД не была больше, чем холодной темной материи. Таким образом, для  $M_{BH} > 10^{13}$  г, мы используем ограничения на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ , полученные в Главе 2 работы из этих двух условий.

В диапазоне масс  $M_{BH} \sim 10^{11} - 10^{13}$  г сосуществует несколько типов ограничений, включая ограничения по фону антинейтрино, рассмотренные в Главе 2, по фотодиссоциации дейтерия [138, 139] и по искажению реликтового излучения [140]. Ограничения по диссоциации дейтерия оказываются несколько сильнее, и для этого диапазона масс (соответствующего  $k \gtrsim 10^{17}$  Мпк $^{-1}$ ), мы используем ограничение на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ , полученное в [20].

Окончательный результат для ограничения на фон индуцированных ГВ

показан на рисунке 29. Две кривые, показанные на этом рисунке, соответствуют разным предположениям о пороге рождения черной дыры,  $\delta_c$ . Возможность поставить конкретные пределы на  $\Omega_{GW}$  обеспечивается слабой ее зависимостью от высоты пика (формула (223)) и достаточной слабостью зависимости ограничения на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$  от  $\Sigma$  (Глава 2). Заметим, что в случае очень узкого пика (близкого к  $\delta$ -функции), ограничения на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}^0$ , использованные нами, уже не работают, а формула (223) неприменима. Результаты работы [46] показывают, однако, что в таком случае максимальное значение  $\Omega_{GW}^{max} \sim 10^{-7} - 10^{-8}$  в рассматриваемой нами области частот (мГц-кГц), т.е., значения меньше, чем пределы рис. 29. Так что показанные пределы

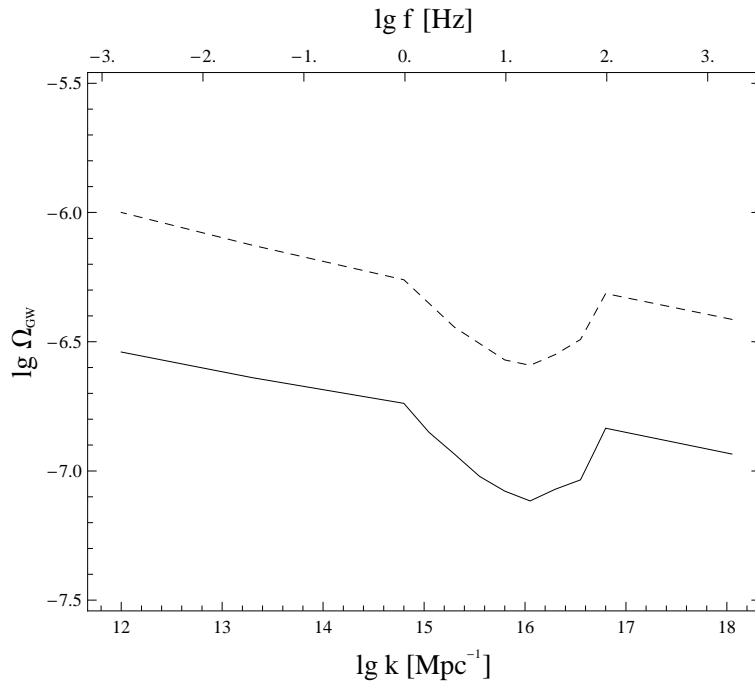


Рис. 29: Ограничения на долю плотности индуцированных ГВ  $\Omega_{GW}$ , полученные в работе. Верхняя кривая соответствует предположению о пороге рождения ПЧД  $\delta_c = 0.45$ , нижняя -  $\delta_c = 1/3$ .

оказываются действительно максимальными.

Отметим, что пределы рис. 29 покрывают собой область частот существующих экспериментов LIGO и Virgo ( $f \sim 100$  Гц), а также области, которые будут исследованы космическими экспериментами LISA ( $f \sim$  мГц) и BBO/DECIGO ( $f \sim 0.1$  Гц).

Значение полученного предела состоит в том, что в случае, если экспериментаторы измерят фон ГВ, превышающий пределы рис. 29, можно будет с уверенностью сказать, что речь идет об обнаружении одного из экзотических источников ГВ (см. раздел 3.1). В то же время, сами по себе индуцированные ГВ являются интересным возможным источником фона, который может превышать на много порядков “стандартные” инфляционные предсказания и, кроме того, давать ценную информацию о спектре первичных скалярных возмущений.

### 3.5 Модель инфляции с “бегущей массой”

При определенных параметрах, модель БМ, изучавшаяся в предыдущих главах, обеспечивает достижение спектром скалярных возмущений достаточно больших значений. В то же время, спектр ГВ, генерированных на инфляционной стадии, дается формулой (163), и, подставляя типичные для модели БМ значения  $H_I \sim (10^{-15} - 10^{-22})m_{Pl}$  [73], получаем предсказание для  $\mathcal{P}_h(k) \sim 10^{-30}$  или ниже, что далеко за гранью чувствительности планируемых экспериментов. Такое поведение спектров легко понять, учитывая, что

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim \frac{V_0}{\epsilon}, \quad \mathcal{P}_h^{(\text{infl})} \sim V_0, \quad (229)$$

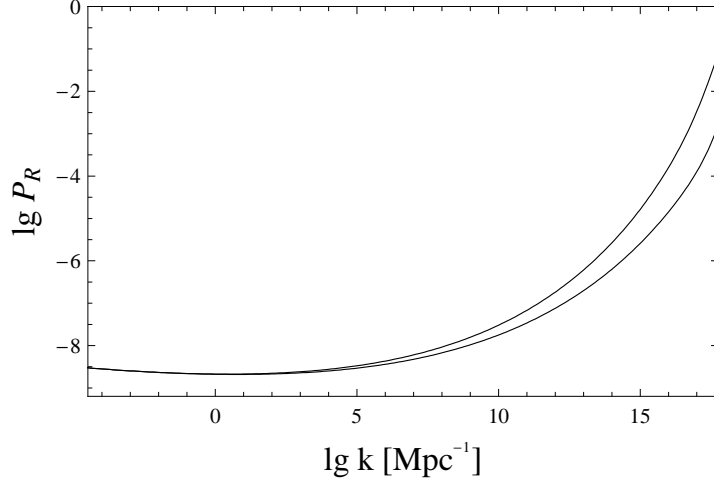


Рис. 30: Расчет спектра  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  в модели с “бегущей массой” при следующем наборе параметров:  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$  (обе кривые),  $n'_0 = 0.0045$  (верхняя кривая),  $n'_0 = 0.004$  (нижняя кривая).

а  $\epsilon \sim (V'/V)^2 \sim \phi^2$  - сильно меняется, но всегда остается очень малой в данной модели.

Тем не менее, если достигаются большие значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ , спектр индуцированных ГВ будет совсем не так мал. Проиллюстрируем это численным расчетом. Для параметров  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$ ;  $n'_0 = 4.5 \times 10^{-3}$  и  $n'_0 = 4.0 \times 10^{-3}$  спектр  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  показан на рисунке 30. Верхняя кривая соответствует максимально возможному бегу спектрального индекса ( $n'_0 = 4.5 \times 10^{-3}$ ), разрешенному по ПЧД для данных  $n_0$  и  $T_{RH}$ .

Результат расчета спектра индуцированных ГВ, соответствующих спектру  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  рисунка 30, показан на рисунке 31 (слева). Видно, что достигаются большие значения  $\Omega_{GW}$ , а чувствительности Advanced LIGO будет достаточно для того, чтобы наложить более сильные ограничения на эту модель, чем те, что получаются по ПЧД.

На рисунке 31 (справа) показан расчет для другого набора параметров, соответствующих более низкой температуре рехитинга, и несколько более низким частотам. Действительно, в предположении мгновенного рехитинга, которым мы пользуемся,

$$H_I \cong \frac{\pi}{g_*^{1/2} 3\sqrt{10}} \frac{T_{RH}^2}{M_p}, \quad (230)$$

$$k_{end} \approx 2.6 \times 10^7 g_*^{1/6} \left( \frac{T_{RH}}{1 \text{ GeV}} \right) \text{Mpc}^{-1}, \quad (231)$$

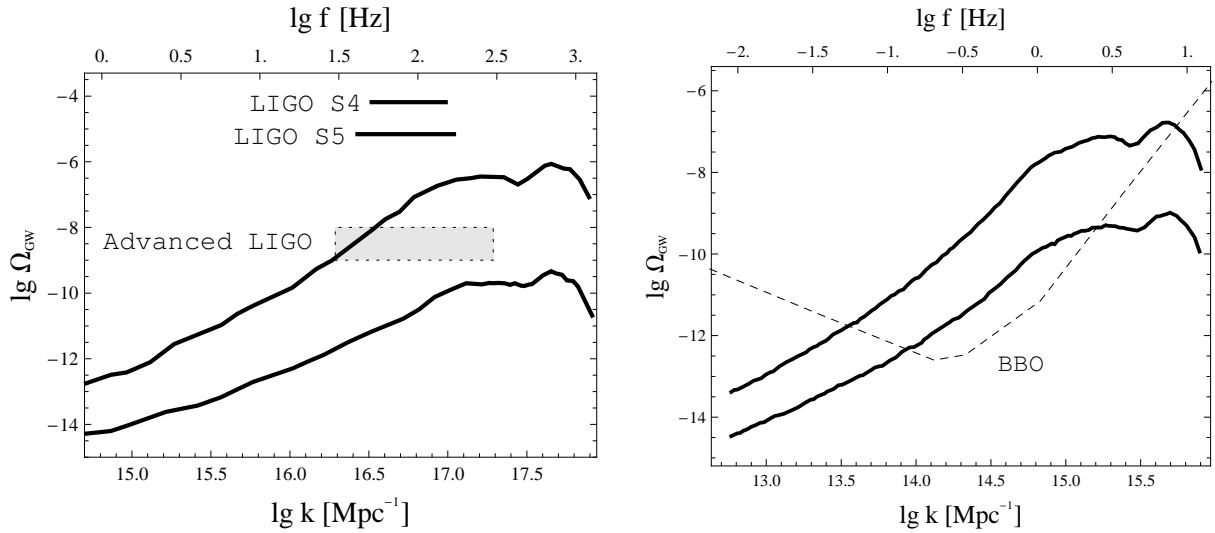


Рис. 31: Расчет  $\Omega_{GW}$  во втором порядке для модели с “бегущей массой”.  
 Левый график:  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$  (обе кривые),  $n'_0 = 0.0045$  (верхняя кривая),  $n'_0 = 0.004$  (нижняя кривая). Правый график:  $T_{RH} = 10^8$  ГэВ,  $n_0 = 0.96$  (обе кривые),  $n'_0 = 0.0054$  (верхняя кривая),  $n'_0 = 0.005$  (нижняя кривая).  
 Больше значение  $n'_0$  в обоих случаях - максимальное, не закрытое по ПЧД. Также показаны существующие пределы эксперимента LIGO и оценка чувствительности планируемых экспериментов Advanced LIGO [134] и BBO [137].

и, поскольку модель БМ предсказывает большие значения  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  как раз в области  $k \sim k_{end}$ , то и спектр индуцированных ГВ имеет максимум в соответствующей области, зависящей от  $T_{RH}$ .

В обоих случаях (рис. 31) максимальные значения  $\Omega_{GW}$  близки к пределам, показанным на рис. 29. Это говорит о достаточно хорошей надежности предела, т.к. спектр модели БМ сильно отличается от пика формы (133). В случае примера с  $T_{RH} = 10^{10}$  ГэВ (рис. 31 слева) превышение  $\Omega_{GW}$  над пределом на фактор порядка 2 обусловлено тем, что при ограничении параметров модели БМ в этом случае мы использовали нейтринные эксперименты, а предел по диссоциации дейтерия, использованный при получении рис. 29, несколько сильнее.

### 3.6 Обсуждение результатов

Наземные интерферометры могут измерять  $\Omega_{GW}$  в интервале частот от 10 Гц до нескольких кГц [134], т.е. в интервале масс ПЧД от  $\sim 10^{15}$  г до  $\sim 10^{10}$  г. В частности,  $f(M_* = 5 \times 10^{14} \text{ г}) = 12$  Гц. Таким образом, эти эксперименты могут в скором будущем дать новые независимые ограничения на концентрацию ПЧД и спектр возмущений кривизны в том интервале масс, где уже имеются другие ограничения.

Преимуществом экспериментов по поиску ГВ по сравнению с прямым поиском ПЧД является более сильная зависимость ограничения на  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  от непосредственно измеряемой физической величины. Действительно, для ГВ-экспреиментов,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim \sqrt{\Omega_{GW}}. \quad (232)$$



В случае же измерения фонов нейтрино или гамма-квантов, или поиска вспышек от ПЧД,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \sim \ln(n_{PBH}). \quad (233)$$

Подводя итоги этой главы, сделаем основные заключения.

1. ГВ второго порядка могут быть основным вкладом в космологический фон ГВ, особенно если масштаб инфляции существенно меньше масштаба теории Великого объединения. Максимальные предсказываемые значения близки к возможностям уже существующих установок.

2. Существуют пределы на возможную интенсивность фона второго порядка, которые получаются из ранее известных ограничений на спектр скалярных возмущений (из ПЧД). В случае экспериментального обнаружения фона ГВ, превышающего этот предел, можно будет с уверенностью сказать, что сигнал вызван каким-то новым экзотическим механизмом рождения ГВ.

3. На сегодняшний день фон ГВ второго порядка ограничен по ненаблюдению ПЧД. Однако в будущем, измерения фона ГВ позволят дать ограничения на концентрацию ПЧД – гораздо более сильные, чем имеются сегодня.

# Глава 4. Экспериментальный поиск черных дыр на финальной стадии испарения

## 4.1 Поиск испаряющихся первичных черных дыр в окрестности Земли

Существование или отсутствие ПЧД - вопрос экспериментальный. Их обнаружение позволит получить ценную информацию о процессах, происходивших в ранней Вселенной, прежде всего о закономерностях инфляционного расширения и возникновения наблюдаемой ныне структуры. Необнаружение ПЧД при данном уровне экспериментальной техники также несет в себе полезную информацию, и позволяет продвинуться дальше в понимании ранней Вселенной.

Поиск ПЧД, находящихся сегодня на финальной стадии своего испарения, является одной из интересных задач современной экспериментальной физики высоких энергий. Начальная масса такой черной дыры, образовавшейся в ранней Вселенной, как мы видели, должна была быть равна  $M_* \approx 5 \times 10^{14}$  г.

Возможную концентрацию таких ПЧД во Вселенной можно грубо оценить, например, из ограничения Пэйджа - Хокинга (10):

$$n_{BH} \lesssim \frac{\rho_c \Omega_{PBH}}{M_*} \sim 10^4 \text{ pc}^{-3}, \quad (234)$$

что соответствует ограничению на расстояние до ближайшей к нам черной дыры

$$l_{BH} > n_{BH}^{-1/3} \sim 0.1 \text{ pc}. \quad (235)$$

Разумеется, локальная плотность ПЧД в галактике или в Солнечной системе может быть выше на несколько порядков, чем средняя внегалактическая плотность, и ограничения (234, 235) этого не учитывают, не говоря уже о самой модельной зависимости предела Пэйджа-Хокинга.

С точки зрения поиска ПЧД на последних стадиях испарения, интересна не сама их концентрация, а число вспышек в единице объема в единице времени (в окрестности Земли). Грубо, из (234) можно оценить частоту вспышек, считая время жизни ПЧД массы  $M_*$  порядка времени жизни Вселенной ( $\sim 10^{10}$  лет):

$$\nu < \zeta_{PBH} \frac{n_{BH}}{10^{10} \text{ yr}} < 10^{-6} \cdot \zeta_{PBH} \text{ pc}^{-3} \text{ yr}^{-1}, \quad (236)$$

где множитель  $\zeta_{PBH}$  учитывает кластеризацию ПЧД и показывает, во сколько раз локальная плотность ПЧД выше средней плотности во Вселенной. В литературе имеются разные оценки этого фактора. Традиционно (см., например, [96]) оценивается  $\zeta_{PBH} \sim 10^5 - 10^7$ , так что частота вспышек из (236)  $\nu \lesssim 10 \text{ пк}^{-3} \text{ год}^{-1}$ . Однако, например, в работе [141] показывается, что возможны значительно бóльшие значения  $\zeta_{PBH}$ , вплоть до  $10^{22}$ , что приводит к соответственному ухудшению предела на  $\nu$ . Таким образом, становится понятен интерес к прямым экспериментальным пределам.

Зависимость массы черной дыры от времени дается соотношением (9). Оно может быть проинтегрировано, если известна функция  $\alpha(M_{BH})$ . Так, для частиц Стандартной Модели, при энергиях выше 100 ГэВ,  $g_* \approx 100$ , и  $\alpha \approx 4 \times 10^{-3} M_{Pl}^4$ . Более точно, и переходя к безразмерной константе  $\tilde{\alpha}$ , запишем:

$$\alpha_{SM}(T \gtrsim 100 \text{ GeV}) = \tilde{\alpha} M_{Pl}^4, \quad \tilde{\alpha} = 4.43 \times 10^{-3}. \quad (237)$$

Время жизни черной дыры с начальной температурой  $T_H$  ( $T_H > 100$  ГэВ) тогда равно

$$t_l = \frac{M_{Pl}^2}{3\tilde{\alpha}(8\pi T_H)^3}. \quad (238)$$

Учитывая связь секунд с энергетическими единицами,  $1 \text{ ГэВ}^{-1} = 6.6 \times 10^{-25}$  сек, можно переписать это в удобном виде

$$t_l(\text{s}) = 4.7 \times 10^{11} \left( \frac{T_H}{\text{GeV}} \right)^{-3}. \quad (239)$$

Легко оценить отсюда, что черная дыра с начальной температурой 100 ГэВ проживет 5 дней, с температурой 1 ТэВ - 8 минут, а 10 ТэВ - всего 0.5 секунды. Таким образом, финальная стадия испарения ПЧД со стороны напоминает собой взрыв: в определенный момент наблюдатель замечает дыру, температура и светимость которой резко возрастают, после чего объект пропадает.

Интересно оценить расстояние, с которого может быть наблюдаена испаряющаяся черная дыра. Пусть мы наблюдаем гамма-кванты от ПЧД, расположенной на расстоянии  $R$ , имея детектор эффективной площади  $S(\theta)$ . Среднее число попавших в детектор фотонов равно, очевидно,

$$\bar{n}(\theta) = \frac{N_\gamma(\theta, t_l)S(\theta)}{4\pi R^2}, \quad (240)$$

где

$$N_\gamma(\theta, t_l) = \int_0^\infty \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} P(E_\gamma, \theta) dE_\gamma \quad (241)$$

есть полное число гамма-квантов, которые могут быть зарегистрированы установкой,  $P(E_\gamma, \theta)$  - вероятность регистрации гамма-кванта установкой (обычно в первом приближении можно считать, что при  $E > E_{th}(\theta)$  все

фотоны регистрируются и  $P = 1$ , а при меньших энергиях  $P = 0$ ). Понятно, что надежное детектирование возможно только при  $\bar{n}(\theta) > 1$  - в этом случае можно ожидать приход в течение короткого промежутка времени нескольких фотонов из одной и той же точки небесной сферы. Понятно также, что фотоны, пришедшие от ПЧД позднее, скорее всего будут иметь более высокую энергию (так как черная дыра со временем становится горячее).

Для конкретных оценок (например, для взятия интеграла в (241)) необходимо задаться теоретической моделью испарения гамма-квантов. Таким образом, устанавливаемые пределы на концентрацию ПЧД оказываются модельно-зависимыми.

## 4.2 Теоретическая неопределенность спектра фотонов от испарения черной дыры

Для анализа экспериментальных данных по вспышкам гамма-излучения с целью поиска испаряющихся первичных черных дыр необходимо использовать ту или иную физическую модель испарения, предсказывающую энергетические и временные характеристики фотонного сигнала. В настоящей главе рассматриваются три модели испарения: в первой из них [48] (наиболее известной) предполагается, что в суммарный фотонный спектр от испаряющихся ПЧД вносят большой вклад фотоны, возникающие в процессах фрагментации испаряемых кварков, в двух других [49, 142] учитываются также фотоны, рождающиеся при взаимодействии испаряемых кварков (а также лептонов) друг с другом. Взаимодействия испаряемых частиц суще-

ственны, если вокруг ПЧД образуется, в процессе испарения, нечто вроде фото- или хромосферы (как это и предполагается в [49, 142]).

В недавней работе МакГиббон и др. [50] приводятся аргументы (основывающиеся на классическом результате Хокинга [9]), что фото- и хромосферные эффекты пренебрежимо малы, и испаряемые частицы практически не взаимодействуют друг с другом. Наша точка зрения (далее мы постараемся ее обосновать) состоит в том, что подобные взаимодействия могут быть существенными (и, в частности, вокруг черной дыры может существовать некое подобие тепловой атмосферы). Во всяком случае, процессы формирования спектра хокинговского излучения нельзя отделить от процессов взаимодействия испаряемых частиц, происходящих на расстояниях от центра черной дыры, превышающих (в некоторых моделях значительно) ее гравитационный радиус.

Мы предлагаем, при анализе данных, все три модели рассматривать на равноправной основе (как это и было сделано в совместных работах с экспериментаторами БНО ИЯИ РАН - см. список работ в конце списка литературы). При этом мы не настаиваем на правильности исходных предпосылок хромосферных моделей, разработанных в [49, 142]; нашей целью является лишь демонстрация чувствительности используемых экспериментальных методов к форме фотонного спектра и временным характеристикам вспышки (имея в виду, что истинная форма этого спектра может отличаться от “канонической”, предсказанной в [48], и, кроме того, максимальная эффективная температура излучения может сильно отличаться от планковской).

Знаменитый результат Хокинга [9], согласно которому черная дыра массы  $M$  эмитирует чернотельное излучение, точно соответствующее температуре  $T_H = T_R/4GM$  (где  $T_R$  - безразмерная риндлеровская температура,  $T_R = 1/2\pi$ ), был получен в полуклассическом приближении. Предполагалось, в частности, что эффекты от взаимодействия выходящего излучения с веществом, падающим на черную дыру (эффекты “обратной реакции”) малы и не влияют на классическую геометрию коллапса. Хорошо известно, что вывод формулы Хокинга для спектра излучения предполагает явление потери информации [143] и, соответственно, возможность неунитарной эволюции черной дыры. Это является прямым следствием строгой локальности квантовой теории поля, ведущей к тому, что гильбертовы состояния внутри и снаружи горизонта черной дыры существуют независимо и, соответственно, к тому, что квантовомеханическое состояние черной дыры характеризуется матрицей плотности (т.е., не является “чистым”).

Во многих работах отмечалось, однако (см., например, [144, 145, 146]), что полуклассическое приближение, использованное в [9], является слишком грубым: нельзя, вообще говоря, считать, что выходящие из черной дыры частицы не испытывают влияния падающего на нее вещества. Более того, гравитационные взаимодействия хокинговского излучения (после того, как оно уже “отделилось от горизонта”) с падающими на черную дыру частицами могут быть достаточно сильными, вплоть до того, что эти взаимодействия могут приводить к деформации метрики и к нарушению локальности. Известно, что квантовая гравитационная динамика существенно нелокальна, и, поэтому, естественно предположить, что именно

эта нелокальность может, после ее учета, привести к решению вышеупомянутой проблемы потери информации [146].

Приближенный (эффективный) учет эффектов “обратной реакции” реализуется в подходе, в котором постулируется существование граничного условия для всех полей на гиперповерхности, отстоящей от горизонта на расстоянии порядка планковской длины. Примерами такого подхода являются модель “кирпичной стенки” [147], модель “растянутого горизонта” [148] и модель “отскока” [149]. Эти модели основываются на предположении, что сильные гравитационные взаимодействия между квантами полей эффективно формируют этот барьер между горизонтом и “стенкой”. Предполагается, кроме того, что процесс образования и испарения черной дыры, с точки зрения удаленного наблюдателя, может быть полностью описан методами стандартной квантовой теории поля, с унитарной  $S$ -матрицей и чистыми квантовыми состояниями.

Идея “растянутого горизонта” (иногда используется термин “мембрана”) была высказана много лет назад [150], но в то время мембрана рассматривалась как удобная математическая конструкция, а не физический объект, наделенный микрофизическими степенями свободы. Нужно подчеркнуть, что подход, использующий концепцию “растянутого горизонта”, имеет смысл только для внешнего наблюдателя (а не для свободно падающего). Самое существенное в этом подходе то, что “растянутый горизонт” может, с помощью своих степеней свободы, поглощать, термализовать и испускать, в виде хокинговского излучения, любую квантовомеханическую информацию (не допуская ее потери) [148].



Локальная собственная температура “растянутого горизонта”,  $T_s$ , связана с температурой, измеряемой удаленным наблюдателем (т.е., по определению, с температурой Хокинга), соотношением

$$T_s = \frac{dt}{d\tau} T_H, \quad (242)$$

где  $d\tau/dt$  - фактор растяжения времени, связывающий временные интервалы на “растянутом горизонте” с интервалами времени по часам удаленного наблюдателя,

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\rho_h}{4MG} \sim \frac{\rho_h}{r_h}. \quad (243)$$

В этой формуле  $\rho_h$  - расстояние от “растянутого горизонта” до горизонта,  $r_h$  - гравитационный радиус черной дыры с массой  $M$ . В случае, когда  $\rho_h \sim GM_P \equiv l_P$ , имеем

$$\frac{d\tau}{dt} \sim \frac{M_P}{M}, \quad (244)$$

и, если  $T_s \sim M_P$  (независимо от массы и размера черной дыры), получаем

$$T_H \sim \frac{M_P^2}{M}. \quad (245)$$

Очень существенно, что “растянутый горизонт”, по предположению, находится в тепловом равновесии с материей, его окружающей, в течение большей части времени испарения. Число эмитируемых частиц в единицу времени должно быть пропорционально произведению площади горизонта черной дыры на фактор растяжения времени (для удаленного наблюдателя) [148],

$$\frac{dN}{dt} \sim M^2 \frac{d\tau}{dt} \sim M \quad (246)$$

(если все излученные частицы уходят на бесконечность). С другой стороны, число частиц, реально уходящих на бесконечность, равно

$$\frac{dN}{dt} \sim \frac{L}{E_{\text{тип}}} \sim \frac{1}{M}, \quad (247)$$

где  $L$ -светимость черной дыры,  $L \sim 1/M^2$ ,  $E_{\text{тип}} \sim T_H \sim M_P^2/M$  - характерная энергия излученных частиц. Из сравнения (246) и (247) следует, что большая часть эмитируемых частиц не уходит на бесконечность, т.е. вокруг “растянутого горизонта” образуется тепловая атмосфера (вследствие повторных взаимодействий эмитируемых частиц с “растянутым горизонтом” и друг с другом).

Следует еще отметить, что в этих моделях черная дыра распадается из “чистого” квантовомеханического состояния, поэтому спектр излучения не обязательно является строго тепловым (по форме), в особенности на финальных стадиях испарения, когда масса черной дыры уже мала.

В общем случае температура “растянутого горизонта”,  $T_s$ , так же как и расстояние  $\rho_h$ , зависят от микрофизики процесса. Соответственно, максимальное значение температуры Хокинга и форма спектра испаряемых частиц зависят от модели. Понятно, что эта зависимость от модели особенно существенна на конечных стадиях испарения, когда радиус черной дыры  $r_h$  становится сравнимым с  $\rho_h$ . В этом случае центробежный барьер становится неэффективным и, как следствие, частицы тепловой атмосферы вокруг “растянутого горизонта” постепенно получают возможность уходить на бесконечность. Экспериментальная сигнатура всплеска может быть похожа на предсказанную в хромосферных моделях [49, 142], если максимальное значение  $T_H$  много меньше  $M_P$ . Такая ситуация возможна, в

частности, в струнных моделях. В этих моделях предполагается, что “растянутый горизонт” находится на расстоянии  $\sim l_s$  от горизонта событий ( $l_s$  - фундаментальная длина теории струн). Локальная собственная температура на “растянутом горизонте” равна  $T_s = 1/2\pi l_s$  [151]. Обычно предполагается, что струнная константа связи,  $g^2 = Gl_s^2$ , очень мала, так что планковский и струнный масштабы хорошо разделены. Когда, в процессе испарения,  $T_H$  приближается к  $T_s$  ( $T_s$ , по предположению, есть температура Хагедорна струнной теории), радиус черной дыры становится равным  $l_s$ . В этот момент времени квантовомеханическое состояние черной дыры может превратиться в состояние струны, имеющее более высокую энтропию. Возможность такого перехода обсуждается во многих работах (см. работу [152] и ссылки в ней).

Существенно также, что идея “соответствия струна - черная дыра” [153], которая предполагает, что состояния черной дыры и высоковозбужденные состояния фундаментальной струны могут быть идентичными [151, 154], помогает понять физический смысл энтропии черной дыры (т.е. природу “внутренних состояний” черной дыры и степеней свободы “растянутого горизонта”).

Важно отметить, что струны - идеальные объекты для взаимодействия с “растянутым горизонтом”, вследствие того, что при приближении к “растянутому горизонту” падающей на черную дыру струны и соответствующем увеличении ее энергии, имеет место расширение размеров струны в поперечной плоскости, а также вследствие того, что амплитуды рассеяния струн имеют реджевское поведение, а их сечения растут с энергией [155].

Наиболее существенная, в данном контексте, особенность этого сценария состоит в том, что струна, возникающая в упомянутом выше фазовом переходе, распадается при температуре Хагедорна, так что импульсы эмитируемых частиц не превышают  $T_s$  (причем  $T_s$  может быть сравнительно мало, порядка 0.1 ТэВ).

### 4.3 Расчет энергетических и временных характеристик гамма-всплесков

В модели МакГиббон и Веббера [48] (далее, MW90) предполагается, что излученные частицы (кварки и лептоны) не взаимодействуют между собой и все излученные кварки распространяются свободно и фрагментируют независимо друг от друга. Спектр фотонов формируется в результате фрагментации кварков и распада нестабильных адронов, вследствие чего этот спектр не является тепловым. В хромосферных моделях Хеклера [49] (далее - Н97) и Дагхигх и Капусты [142] (далее - DK02) взаимодействующие между собой излученные частицы формируют (почти) тепловую хромосферу, что, в результате дробления энергии, приводит к более крутому спектру фотонов в области высоких энергий. Спектры излучаемых ПЧД гамма-квантов зависят от времени, остающегося до конца испарения черной дыры  $t_l$  (239).

#### 4.3.1 Модель с прямой фрагментацией кварков

В работе [48] был вычислен спектр частиц, испускаемых горячей черной дырой, с учетом распадов продуктов фрагментации кварков. В области

энергий, существенно меньших  $T_H$ , поток частиц, даваемых продуктами распада, может быть на несколько порядков выше “прямого” потока, даваемого (140).

Рассмотрим спектр фотонов, испускаемых горячей ( $T_H > m_\pi$ ) черной дырой. Основной канал рождения не прямых фотонов - распад  $\pi^0$ , образованных фрагментировавшими кварками:

$$(u, d) \rightarrow \pi^0 \rightarrow 2\gamma.$$

Фрагментацию будем описывать функцией

$$\frac{dg_{j\pi}}{dE_\pi}(E_\pi, Q) = \frac{15}{16} \sqrt{\frac{Q}{E_\pi^3}} \left(1 - \frac{E_\pi}{Q}\right)^2, \quad (248)$$

где  $Q$  - энергия кварка,  $E_\pi$  - пиона. Эта эмпирическая зависимость была использована, например, в работах [28, 49].

Спектр гамма-квантов от распадов  $\pi^0$  равен

$$\frac{d\dot{N}_\gamma}{dE_\gamma}(E_\gamma) = \int_{(4E_\gamma^2 + m_\pi^2)/4E_\gamma}^{\infty} \frac{d\dot{N}_\pi}{dE_\pi} \frac{dg_{\pi\gamma}(E_\pi)}{dE_\gamma} dE_\pi, \quad (249)$$

где первый множитель в подынтегральном выражении - спектр пионов

$$\frac{d\dot{N}_\pi}{dE_\pi} = \sum_j \int_{Q=E_\pi}^{\infty} \frac{d\dot{N}_j}{dQ} \frac{dg_{j\pi}}{dE_\pi} dQ \quad (250)$$

( $d\dot{N}_j/dQ$  - спектр кварков сорта  $j$ ), а второй - спектр фотонов от распада одного пиона. Для распада, изотропного в системе покоя пиона, спектр фотонов, как известно, представляет собой ”ступеньку”, таким образом,

$$\frac{dg_{\pi\gamma}(E_\pi)}{dE_\gamma} = \frac{2}{E_\gamma^{max} - E_\gamma^{min}} = \frac{2}{E_\pi \beta_\pi}. \quad (251)$$

В этой формуле было учтено, что пределы спектра гамма-квантов от распада пиона с энергией  $E_\pi$  равны

$$\gamma_\pi \frac{m_\pi}{2}(1 + \beta_\pi) > E_\gamma > \gamma_\pi \frac{m_\pi}{2}(1 - \beta_\pi), \quad (252)$$

где  $\gamma_\pi = E_\pi/m_\pi$ ,  $\beta_\pi = \sqrt{1 - \gamma_\pi^{-2}}$ . Из (252) также получается и значение нижнего предела в (249).

Рассчитывая спектр кварков по формуле (140) и пользуясь (249, 250, 251), мы вычисляем спектр гамма-квантов в этой модели. Суммирование по разным типам кварков мы осуществляем приближенно, рассчитывая спектр гамма-квантов от одного кварка и умножая на фактор  $\nu_0$ , учитывающий степени свободы КХД (эффективное число степеней свободы кварков и глюонов). Простая оценка для  $\nu_0$  учитывает  $u$  и  $d$ -кварки, их антикварки и все глюоны, в этом случае  $\nu_0 = (1/3)(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2) = 40/3$  ( $1/3$  есть отношение числа  $\pi^0$ -мезонов к общему числу  $\pi$ -мезонов). Нижняя граница параметра  $\nu_0$  получается при учете только одного типа кварков ( $\nu_0 = 4$ ).

Для начальной температуры черной дыры  $T_H = 10$  ТэВ, вычисленный и проинтегрированный по времени до конца испарения спектр показан на рисунке 32. Максимум с изломом при энергии  $E_\gamma = m_\pi/2$  с точки зрения математики обусловлен поведением нижнего предела интегрирования в (249). Большое количество фотонов с энергией  $m_\pi/2$  объясняется поведением функции фрагментации (248), дающей очень много пионов низких энергий от высокоэнергетичного кварка.

### 4.3.2 Хромосферные модели

В работах Хеклера [49] был предложен другой подход к вычислению спектра вторичных гамма-квантов. Им было предположено, что испарившиеся из черной дыры кварки не фрагментируют сразу же после испарения, а взаимодействуют, образуя оболочку вокруг черной дыры - хромосферу. Охлаждаясь по мере движения от меньших радиусов к бóльшим,

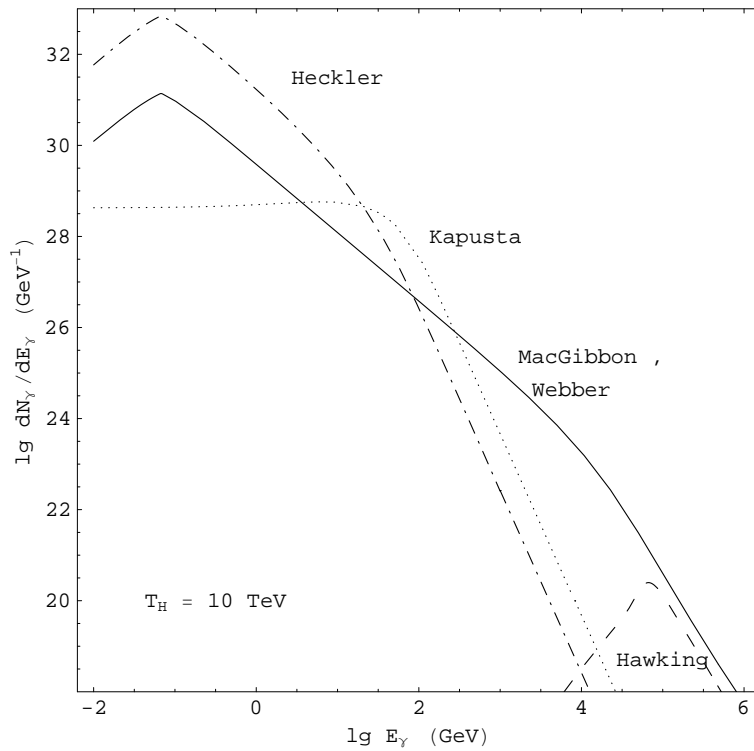


Рис. 32: Проинтегрированный по времени спектр гамма-квантов от черной дыры с начальной температурой  $T_H = 10$  ТэВ, получающийся в разных моделях. Кривая “Hawking”: вычисления по формулам (140), (143). Кривая “MacGibbon, Webber”: вычисления в модели с прямой фрагментацией кварков MW90 [48]. Кривая “Heckler”: модель с хромосферой H97 [49]. Кривая “Kapusta”: модель с хромосферой DK02 [142].

такая жидкость из кварков, глюонов, и, возможно, других частиц, в конце концов достигает температуры  $\Lambda_{QCD} \sim 200$  МэВ, при которой начинается свободное распространение кварков, скоро после этого фрагментирующихся в адроны.

В литературе рассматриваются и другие модели хромосферы. Так, в работах Капусты и др. [142] предполагается, что хромосфера состоит не из кварков, а уже из продуктов их фрагментации (пионов, нуклонов и т.д.). Граница хромосферы, при которой начинается прямолинейное распространение невзаимодействующих друг с другом частиц, также определяется температурой порядка  $\Lambda_{QCD}$ . Фотоны в этой модели излучаются с поверхности хромосферы с планковским спектром, а также получаются в распаде  $\pi^0$ .

Для описания хромосферы [49, 142] используется модель неидеальной жидкости (см. [156]). Пусть  $\gamma$  - соответствующий безразмерной скорости истечения  $v$  лоренц-фактор,  $u = v\gamma$ ,  $T$  - локальная температура.

Для  $\gamma \gg 1$  ( $v \approx 1$ ),  $r \gg r_g$ , в предположении что плотность энтропии  $s \sim T^3$ , а члены, описывающие вязкость, пропорциональны  $s$ , получается [49, 142]

$$u(r) \sim r^{1/3} \quad , \quad T(r) \sim r^{-2/3} \quad . \quad (253)$$

Для расчета спектра частиц, испаряемых хромосферой, нам необходимо знать две величины - радиус  $r_f$ , при котором начинается свободное распространение частиц ( $r_f = r(T_f)$ ,  $T_f \sim \Lambda_{QCD}$ ), и лоренц-фактор  $\gamma_f = \gamma(r_f)$ . Строго (в рамках приближения мгновенного отщепления при  $r = r_f$ ), величины  $\gamma_f$  и  $r_f$  находятся из численного решения гидродинамических уравнений [142]. Оценим их здесь по порядку величины. Считая, что хромо-



сфера формируется при радиусе порядка шварцшильдовского, запишем:  $T(r_g) \sim T_H$ . В то же время,  $T(r_f) = T_f$ . Из (253) получаем

$$r_f(T_H) \approx \frac{1}{T_f} \sqrt{\frac{T_H}{T_f}}. \quad (254)$$

Аналогично, считая  $\gamma(r_g) \sim u(r_g) \sim 1$ , из (253) находим

$$\gamma_f \approx u_f \approx \sqrt{\frac{T_H}{T_f}}. \quad (255)$$

Для выяснения основных особенностей хромосферных моделей, можно полагать коэффициенты в (254, 255) равными единице, хотя возможно и уточнить это приближение. Так, в [142] получено

$$\gamma_f \approx 0.22 \sqrt{\frac{T_H}{T_f}}, \quad r_f \approx \frac{0.89}{T_f} \sqrt{\frac{T_H}{T_f}}. \quad (256)$$

Для расчетов в модели DK02 мы будем пользоваться этим результатом, а для модели Н97 примем  $\gamma_f = 0.22 \sqrt{T_H/T_f}$ ,  $r_f = \gamma_f/T_f$ .

Будем считать, что хромосфера черной дыры характеризуется температурой  $T_f$ , при которой начинается свободное распространение частиц, ранее интенсивно взаимодействовавших друг с другом. Соответствующий этой температуре радиус мы обозначили  $r_f$ , безразмерную скорость движения внешней границы хромосферы  $v_f$ , соответствующий лоренц-фактор  $\gamma_f = (1 - v_f^2)^{-1/2}$ .

Вслед за [49, 142], будем считать спектр отщепляющихся от хромосферы частиц (после последнего рассеяния) планковским, то есть характеризуемым числом заполнения

$$f(E) = \frac{1}{\exp(E/T_f) \pm 1}, \quad (257)$$

где знак должен быть выбран в соответствии с типом частицы (плюс для фермионов, минус для бозонов). Как известно, число заполнения (число частиц в одном квантовом состоянии) - релятивистский инвариант, поэтому можно записать

$$f(E) = f'(E') = \frac{1}{\exp(E'/T_f) \pm 1}. \quad (258)$$

Мы рассматриваем две системы отсчета: неподвижную (связанную с черной дырой), которой соответствуют штрихованные величины, и движущуюся со скоростью  $v_f$  относительно нее (в ней неподвижна граница хромосферы и используются нештрихованные переменные). Преобразование Лоренца дает

$$E' = \gamma_f E(1 - v_f \cos \theta), \quad (259)$$

где  $\theta$  - угол между направлением движения частицы и радиус-вектором, проведенным из центра черной дыры. В элементе  $d^3x d^3p$  фазового объема содержится  $g d^3x d^3p \cdot f(E)/(2\pi)^3$  частиц, где  $g$  - число внутренних (спиновых) степеней свободы. Запишем

$$d^3x = 4\pi r_f^2 dt \cos \theta,$$

$$d^3p = 2\pi \sin \theta d\theta E^2 dE$$

(т.к.  $m \approx 0$ , то  $E = p$ ). Интегрируя по  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$  (бóльшие  $\theta$  соответствуют частицам, летящим назад), получаем

$$\frac{d\dot{N}}{dE} = 4\pi r_f^2 \left( \frac{E^2}{2\pi^2} \right) \frac{g}{2} \int_0^1 \frac{\cos \theta d \cos \theta}{\exp(\gamma_f E(1 - v_f \cos \theta)/T_f) \pm 1}. \quad (260)$$

Для фотонов  $g/2 = 1$  и получается формула из [142]. В то же время выражение для  $d\dot{N}/dE$  из [49] отличается от (260) наличием дополнительно-

го множителя  $\gamma_f^2(1 - v_f \cos \theta)$  в числителе подинтегрального выражения, что, по видимому, связано с некорректным преобразованием функции распределения при переходе в другую систему отсчета. Заметим, однако, что основной вклад в (260) при  $T_H \gg T_f$  вносит область  $\cos \theta \approx 1$ , а в этом случае  $\gamma_f^2(1 - v_f \cos \theta) \sim 1$ , так что на окончательном результате отличие формул почти не сказывается.

На рисунке 32 показаны наши результаты для спектров гамма-квантов, испаряемых черной дырой (начальная температура  $T_H = 10$  ТэВ). Видна сильная модельная зависимость спектра.

### 4.3.3 Временные характеристики всплесков

Назовем длительностью вспышки  $t_b$  для данной установки время, остающееся до конца испарения черной дыры, в течение которого излучаются 99% гамма-квантов, которые могут быть зарегистрированы установкой. Так определенная длительность вспышки зависит от порога регистрации фотонов установкой,  $E_{th}$ , и, конечно, от модели испарения. Результаты расчета  $t_b$  для трех моделей испарения показаны на рис. 33.

Кроме пороговой энергии, важным параметром конкретной экспериментальной установки является мертвое время  $t_d$ . Приходящие в течение этого времени фотоны (ливни) регистрируются как один фотон. Это значит, что поиск кластеров ливней от ПЧД при  $t_b < t_d$  невозможен.

К примеру, для установки “Андырчи” [157]  $t_d = 1$  мсек, а  $E_{th} \sim 60$  ТэВ. При этом длительность вспышки в модели MW90  $t_b \approx 4$  мсек (для вертикального направления). Поэтому поиск кластеров ливней от ПЧД воз-

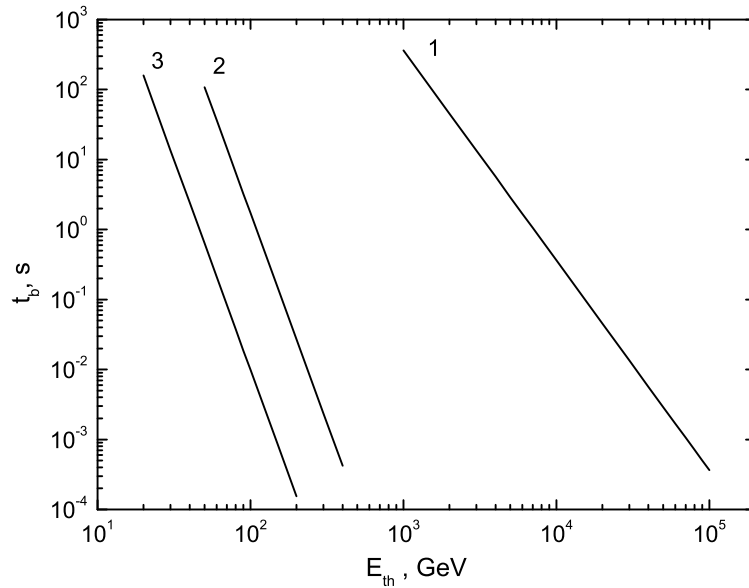


Рис. 33: Длительность вспышки как функция пороговой энергии гамма-квантов для различных моделей испарения: 1 - модель без хромосферы MW90, 2 - модель с хромосферой DK02, 3 - модель с хромосферой H97.

можен, но необходимо учитывать поправки, вносимые мертвым временем установки (и временным профилем вспышки).

Для хромосферных моделей (см. рис. 33) мертвое время ливневых установок оказывается значительно больше длительности вспышки, что не позволяет проводить поиск ПЧД тем же методом. Для прямого поиска событий от ПЧД в рамках хромосферных моделей может быть применена методика поиска выбросов в суммарном темпе счета при работе установок в режиме регистрации одиночной компоненты космических лучей, которую мы обсудим дальше.

#### 4.3.4 Аппроксимационные формулы

Для удобства использования, для проинтегрированных по времени энергетических спектров фотонов были получены аппроксимационные формулы, кусочно - степенным образом приближающие результаты численных расчетов. Формулы применимы для начальных температур черной дыры  $T_H$ , превышающих несколько ГэВ. В этих формулах энергия фотонов и температура измеряется в ГэВ, а спектр  $dN_\gamma/dE_\gamma$  имеет размерность ГэВ<sup>-1</sup>.

Спектр фотонов в модели MW90 аппроксимируется (для  $\nu_0 = 40/3$ ) следующим образом,

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \approx 9 \times 10^{35} \begin{cases} T_H^{-3} \left(\frac{T_H}{E_\gamma}\right)^{3/2} & , E_\gamma < T_H; \\ E_\gamma^{-3} & , E_\gamma \geq T_H. \end{cases} \quad (261)$$

Для модели Н97, при  $E_\gamma > m_\pi/2$ , параметризация имеет вид

$$\begin{aligned} \lg \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} &\approx \\ &\approx \begin{cases} 36.24 - 1.5 \lg E_\gamma - 1.25 \lg T_H, & \lg E_\gamma \leq 0.5 \lg T_H - 1.55; \\ 34.9 - 2.4 \lg E_\gamma - 0.8 \lg T_H, & 0.5 \lg T_H - 1.55 < \lg E_\gamma < 0.5 \lg T_H - 0.25; \\ 34.5 - 4 \lg E_\gamma, & \lg E_\gamma \geq 0.5 \lg T_H - 0.25. \end{cases} \end{aligned} \quad (262)$$

В модели DK02, в отличие от предыдущей модели, спектр выходит на константу при малых энергиях фотонов. Параметризация имеет вид

$$\lg \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \approx \begin{cases} 36.8 - 2 \lg T_H, & \lg E_\gamma \leq 0.5 \lg T_H - 0.62; \\ 35.56 - 2 \lg E_\gamma - \lg T_H, & 0.5 \lg T_H - 0.62 < \lg E_\gamma < 0.5 \lg T_H + 0.12; \\ 35.8 - 4 \lg E_\gamma, & \lg E_\gamma \geq 0.5 \lg T_H + 0.12. \end{cases} \quad (263)$$

Отметим, что при асимптотически высоких энергиях дифференциальные фотонные спектры обеих хромосферных моделей характеризуются зависи-

мостью  $\sim E_\gamma^{-4}$ , в отличие от модели MW90, в которой, как видно из (261), эта зависимость имеет вид  $\sim E_\gamma^{-3}$ .

#### 4.4 Возможности экспериментального поиска и обсуждение имеющихся результатов

В общем случае, при вычислении просматриваемого установками эффективного объема пространства  $V_{\text{eff}}$  учитываются флуктуации в числе зарегистрированных событий [158]:

$$V_{\text{eff}} = \int d\Omega \int_0^\infty dR R^2 F(n, \bar{n}(\theta, R)). \quad (264)$$

Здесь  $F(n, \bar{n}(\theta, R))$  - пуассоновская вероятность регистрации  $n$  и более событий при среднем значении  $\bar{n}(\theta, R)$  (формула (240)).

Число всплесков, зарегистрированных за полное время наблюдения  $T$ , можно представить в виде:

$$N = \rho_{\text{РВН}} T V_{\text{eff}}, \quad (265)$$

где  $\rho_{\text{РВН}}$  - концентрация испаряющихся ПЧД. Предполагая, что испаряющиеся ПЧД равномерно распределены в локальной области Галактики, верхний предел  $\rho_{\text{lim}}$  на концентрацию испаряющихся ПЧД на 99% доверительном уровне вычисляется по формуле

$$\rho_{\text{lim}} = \frac{4.6}{V_{\text{eff}} T}. \quad (266)$$

Прямой поиск всплесков высокоэнергичного гамма-излучения от ПЧД, находящихся на последней стадии испарения, ранее проводился в экспери-

ментах на ливневых установках CYGNUS [158] (пороговая энергия первичных фотонов  $E_\gamma \sim 50$  ТэВ), HEGRA ([159],  $E_\gamma \sim 30$  ТэВ), Tibet ([160],  $E_\gamma \sim 10$  ТэВ) и “Андырчи” (см. нашу работу No. 6 в конце списка литературы,  $E_\gamma \sim 60$  ТэВ). Интерпретация результатов таких экспериментов, из-за высокой пороговой энергии первичных гамма-квантов, может проводиться только в рамках модели испарения без хромосферы MW90, так как, как мы видели, хромосферные модели предсказывают слишком малую длительность всплеска высокоэнергичного гамма-излучения, которая много меньше мертвого времени этих установок.

На черенковском телескопе Whipple [161] для  $E_\gamma \sim 1$  ТэВ был получен верхний предел на концентрацию ПЧД, равный  $1.08 \times 10^6$  пк<sup>-3</sup> год<sup>-1</sup>, также с использованием модели MW90. В рамках этой модели, предел Whipple является лучшим на сегодняшний день.

Для прямого поиска событий от ПЧД в рамках хромосферных моделей может быть применена методика поиска выбросов в суммарном темпе счета при работе установок в режиме регистрации одиночной компоненты космических лучей. Направление прихода частиц при работе в таком режиме не определяется, эффективная энергия первичных гамма-квантов зависит, в основном, от высоты расположения установки над уровнем моря. Ранее такая методика применялась при поиске всплесков космического гамма-излучения с энергией фотонов больше нескольких ГэВ ([162, 163, 164], см. также [165] и ссылки в этой работе). Первые ограничения на концентрацию испаряющихся первичных черных дыр для хромосферных моделей испарения DK02 и H97 с использованием данной методики были получены в

Модель испарения	$\rho_{\text{lim}}, \text{пк}^{-3} \text{год}^{-1}$
MW90 (МакГиббон и Веббер, [48])	$6.8 \times 10^9$
H97 (Хеклер, [49])	$5 \times 10^9$
DK02 (Дагхигх и Капуста, [142])	$10^9$

Таблица 1: Полученные на установках “Андырчи” и “Ковер-2” экспериментальные пределы на концентрацию испаряющихся ПЧД для разных теоретических моделей испарения.

наших совместных работах с экспериментаторами БНО на основе данных установок “Андырчи” [157] и “Ковер-2” [166, 167] и приведены в таблице 1 (тем же методом получают и ограничения в модели MW90, приведенные там же).

Поиск вспышек гамма-излучения от ПЧД также проводился ранее в таких экспериментах, как EGRET [168] и SGARFACE [169]. Такие эксперименты чувствительны к вспышкам с  $E_\gamma \sim 100$  МэВ и длительности порядка микросекунд. Подобные вспышки от ПЧД можно ожидать только в модели, использующей гипотезу Хагедорна [170] о существовании предельной температуры ( $T_c \sim 100 - 200$  МэВ) и экспоненциальном росте плотности состояний. В этом случае получаемые экспериментальные пределы оказываются много лучше предела Whipple, например, предел EGRET [168] составляет  $0.05 \text{пк}^{-3} \text{год}^{-1}$ .

Учитывая существующие теоретические неопределенности, представляется необходимым проводить поиск гамма-всплесков от ПЧД на разных установках и при разных энергиях регистрируемых частиц. Например, в



разделе 4.2 отмечается, что теоретически возможны сценарии испарения, в которых характерные энергии эмитируемых фотонов лежат в области 10 – 100 ГэВ. Вследствие этого, ограничения, приведенные в таблице 1 в настоящей работе, имеют самостоятельное значение, наряду с ограничениями, полученными ранее на установках с высоким энергетическим порогом.

## Заключение

Основные результаты диссертации можно сформулировать следующим образом.

1) Показано, что первичные флуктуации плотности с амплитудой, достаточной для рождения в ранней Вселенной первичных черных дыр (ПЧД), могут возникать в ряде инфляционных моделей с одним скалярным полем. Рассмотрены два типа таких моделей: модель с двугорбым инфляционным потенциалом и модель с инфляционным потенциалом с “бегущей массой”. В последнем случае проведен тщательный анализ и установлено, что для рождения значительного количества ПЧД требуется очень небольшой положительный бег индекса спектра скалярных возмущений на космологических масштабах:  $n'_0 \sim 0.005$ , а также изучен вопрос о применимости описания инфляции в терминах классических траекторий в фазовом пространстве.

2) Разработан способ вычисления спектра масс ПЧД в общем случае произвольной зависимости спектра первичных возмущений плотности от сопутствующего размера области возмущения, а также в случае зависимости гравитационного потенциала от времени. Для получения спектра масс, необходимо знать спектр скалярных возмущений  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ , который предсказывается, например, в разных инфляционных моделях. С использованием разработанного метода, проведены расчеты спектров масс ПЧД в нескольких практически интересных случаях.

3) Получены ограничения на параметры инфляционных потенциалов в моделях с большими флуктуациями плотности, основанные на сравнении

предсказанных в этих моделях диффузных внегалактических потоков фотонов и нейтрино от испарения ПЧД с данными экспериментов. В частности, для инфляционной модели с “бегущей массой”, получены ограничения на ее параметры в терминах наблюдаемых величин  $n_0$  и  $n'_0$  (спектральный индекс и его производная).

4) Получены ограничения на амплитуды индуцированных гравитационных волн в области больших частот (порядка  $10^{-3} - 10^3$  Гц), основанные на уже имеющихся (из поисков ПЧД) ограничениях на спектр первичных флуктуаций плотности. Изучена форма спектра индуцированных гравитационных волн в модели с пиком конечной ширины в  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$  и модели с “бегущей массой”.

5) Изучены временные и энергетические характеристики гамма-всплесков, генерируемых ПЧД на конечной стадии испарения. Показана модельная зависимость прямых экспериментальных пределов на концентрацию испаряющихся ПЧД и необходимость использования новых методов их регистрации в случае, если вокруг черной дыры образуется фото- или хромосфера.

## Список литературы

- [1] Ya. B. Zeldovich, I. D. Novikov, *Soviet Astronomy* **10**, 602 (1967).
- [2] S. Hawking, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **152**, 75 (1971).
- [3] B. J. Carr and S. W. Hawking, *MNRAS* **168**, 399 (1974).
- [4] E. R. Harrison, *Phys. Rev. D* **1**, 2726 (1970).
- [5] Ya. B. Zeldovich, *MNRAS* **160**, 1 (1972).
- [6] J. Dunkley *et al.* *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 306 (2009).
- [7] B. J. Carr, *Astrophys. J.* **201**, 1 (1975).
- [8] A. M. Green and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **56**, 6166 (1997).
- [9] S. W. Hawking, *Nature* **248** (1974) 30; S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [10] D. N. Page and S. W. Hawking, *Astrophys. J.* **206**, 1 (1976).
- [11] B. J. Carr and J. E. Lidsey, *Phys. Rev. D* **48**, 543 (1993).
- [12] Ya. B. Zeldovich, A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **24**, 571 (1976).
- [13] Ya. B. Zeldovich, A. A. Starobinsky, M. Yu. Khlopov and V. M. Chechetkin, *Sov. Astron. Lett.* **3**, 110 (1977).
- [14] B. V. Vainer and P. D. Nasel'skii, *Sov. Astron.* **22**, 138 (1978).
- [15] S. Miyama and K. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **59**, 1012 (1978).
- [16] D. Lindley, *MNRAS* **196**, 317 (1981).
- [17] T. Rothman, R. Matzner, *Astrophys. Space Sci* **75**, 229 (1981).
- [18] K. Kohri and J. Yokoyama, *Phys. Rev. D* **61**, 023501 (2000).
- [19] B. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda and J. Yokoyama, arXiv:0912.5297 [astro-ph.CO].
- [20] A. S. Josan, A. M. Green and K. A. Malik, *Phys. Rev. D* **79**, 103520 (2009).

- [21] M. Y. Khlopov, arXiv:0801.0116 [astro-ph].
- [22] J. C. Niemeyer and K. Jedamzik, Phys. Rev. Lett. **80**, 5481 (1998);  
J. C. Niemeyer and K. Jedamzik, Phys. Rev. D **59**, 124013 (1999).
- [23] A. M. Green and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **60**, 063509 (1999).
- [24] W. H. Press and P. Schechter, Astrophys. J. **187**, 425 (1974).
- [25] H. I. Kim and C. H. Lee, Phys. Rev. D **54**, 6001 (1996).
- [26] H. I. Kim, Phys. Rev. D **62**, 063504 (2000).
- [27] H. I. Kim, C. H. Lee and J. H. MacGibbon, Phys. Rev. D **59** (1999) 063004.
- [28] E. V. Bugaev and K. V. Konishchev, Phys. Rev. D **65**, 123005 (2002).
- [29] E. V. Bugaev and K. V. Konishchev, Phys. Rev. D **66**, 084004 (2002).
- [30] P. Ivanov, P. Naselsky and I. Novikov, Phys. Rev. D **50**, 7173 (1994).
- [31] J. S. Bullock and J. R. Primack, Phys. Rev. D **55**, 7423 (1997).
- [32] J. Yokoyama, Phys. Rev. D **58**, 083510 (1998).
- [33] M. Yamaguchi, Phys. Rev. D **64**, 063503 (2001).
- [34] A. M. Green and K. A. Malik, Phys. Rev. D **64**, 021301 (2001).
- [35] B. A. Bassett and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D **63**, 123503 (2001).
- [36] G. N. Felder, J. Garcia-Bellido, P. B. Greene, L. Kofman, A. D. Linde and  
I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **87**, 011601 (2001).
- [37] T. Suyama, T. Tanaka, B. Bassett and H. Kudoh, JCAP **0604**, 001 (2006).
- [38] K. Kohri, D. H. Lyth and A. Melchiorri, JCAP **0804**, 038 (2008).
- [39] L. Boubekour and D. H. Lyth, JCAP **0507**, 010 (2005).
- [40] E. D. Stewart, Phys. Lett. B **391**, 34 (1997).
- [41] E. D. Stewart, Phys. Rev. D **56**, 2019 (1997).
- [42] B. J. Carr, Astron. Astrophys. **89**, 6 (1980).

- [43] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka and K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **487**, L139 (1997).
- [44] G. S. Bisnovaty-Kogan and V. N. Rudenko, *Class. Quant. Grav.* **21**, 3347 (2004).
- [45] N. Seto and A. Cooray, *Phys. Rev. D* **70**, 063512 (2004).
- [46] R. Saito and J. Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 161101 (2009).
- [47] H. Assadollahi and D. Wands, *Phys. Rev. D* **81**, 023527 (2010).
- [48] J. H. MacGibbon and B. R. Webber, *Phys. Rev. D* **41**, 3052 (1990).
- [49] A. F. Heckler, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3430 (1997); A. F. Heckler, *Phys. Rev. D* **55**, 480 (1997).
- [50] J. H. MacGibbon, B. J. Carr and D. N. Page, *Phys. Rev. D* **78**, 064043 (2008).
- [51] A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30**, 682 (1979).
- [52] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981).
- [53] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [54] N. Straumann, *Annalen Phys.* **15**, 701 (2006).
- [55] V. N. Lukash, *JETP Lett.* **31**, 596 (1980); V. N. Lukash, *Sov. Phys. JETP* **52**, 807 (1980).
- [56] G. Chibisov and V. Mukhanov, *MNRAS* **200**, 535 (1982).
- [57] M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986).
- [58] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *“Quantum Fields In Curved Space”*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1982), 340 p.
- [59] A. R. Liddle, P. Parsons and J. D. Barrow, *Phys. Rev. D* **50**, 7222 (1994).
- [60] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Phys. Rept.* **231**, 1 (1993).
- [61] E. D. Stewart and D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993).

- [62] J. O. Gong and E. D. Stewart, Phys. Lett. B **510**, 1 (2001).
- [63] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **55**, 489 (1992).
- [64] S. M. Leach and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **63**, 043508 (2001).
- [65] S. M. Leach, M. Sasaki, D. Wands and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **64**, 023512 (2001).
- [66] S. R. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [67] R. Saito, J. Yokoyama and R. Nagata, JCAP **0806**, 024 (2008).
- [68] K. Kohri, C. M. Lin and D. H. Lyth, JCAP **0712**, 004 (2007).
- [69] L. Covi and D. H. Lyth, Phys. Rev. D **59**, 063515 (1999).
- [70] L. Covi, D. H. Lyth and L. Roszkowski, Phys. Rev. D **60**, 023509 (1999).
- [71] L. Covi, Phys. Rev. D **60**, 023513 (1999).
- [72] G. German, G. G. Ross and S. Sarkar, Phys. Lett. B **469**, 46 (1999).
- [73] L. Covi, D. H. Lyth, A. Melchiorri and C. J. Odman, Phys. Rev. D **70**, 123521 (2004).
- [74] J. Lesgourgues, M. Viel, M. G. Haehnelt and R. Massey, JCAP **0711**, 008 (2007).
- [75] H. V. Peiris and R. Easther, JCAP **0807**, 024 (2008).
- [76] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B117**, 175 (1982).
- [77] A. A. Starobinsky, in: *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, eds. H.J. de Vega, N. Sanchez, Lect. Notes in Physics (Springer-Verlag), vol. 246, pp. 107-126 (1986).
- [78] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **27**, 2848 (1983); Nucl. Phys. B **226**, 527 (1983).
- [79] A. D. Linde, Phys. Lett. B **175**, 395 (1986).
- [80] S. Winitzki, Lect. Notes Phys. **738**, 157 (2008).
- [81] J. Martin and M. Musso, Phys. Rev. D **73**, 043516 (2006).

- [82] J. Martin and M. Musso, Phys. Rev. D **73**, 043517 (2006).
- [83] P. P. Avelino, Phys. Rev. D **72**, 124004 (2005).
- [84] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, New York, 1990).
- [85] D. K. Nadezhin, I. D. Novikov and A. G. Polnarev, Sov. Astron. **22**, 129 (1978).
- [86] M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9 (1993).
- [87] I. Musco, J. C. Miller and L. Rezzolla, Class. Quant. Grav. **22**, 1405 (2005).
- [88] I. Musco, J. C. Miller and A. G. Polnarev, Class. Quant. Grav. **26**, 235001 (2009).
- [89] D. H. Lyth, K. A. Malik, M. Sasaki and I. Zaballa, JCAP **0601**, 011 (2006).
- [90] N. Deruelle and V. F. Mukhanov, Phys. Rev. D **52**, 5549 (1995).
- [91] J. Martin and D. J. Schwarz, Phys. Rev. D **57**, 3302 (1998).
- [92] D. N. Page, Phys. Rev. D **13**, 198 (1976).
- [93] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **667**, 1 (2008).
- [94] P. Kanti, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 4899 (2004).
- [95] R. G. Daghigh and J. I. Kapusta, Phys. Rev. D **67**, 044006 (2003).
- [96] F. Halzen, E. Zas, J. H. MacGibbon and T. C. Weekes, Nature **353**, 807 (1991).
- [97] A. A. Zdziarski and R. Svensson, Astrophys. J. **344**, 551 (1989).
- [98] A. W. Strong, I. V. Moskalenko and O. Reimer, Astrophys. J. **613**, 956 (2004).
- [99] M. Malek *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 061101 (2003).
- [100] G. S. Bisnovatyi-Kogan and S. F. Seidov, Ann. N.Y. Acad. Sci. **422**, 319 (1984).



- [101] S. Ando and K. Sato, *New J. Phys.* **6**, 170 (2004).
- [102] S. M. Leach, I. J. Grivell and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043516 (2000).
- [103] P. H. Frampton and T. W. Kephart, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 1573 (2005).
- [104] C. Bambi, A. D. Dolgov and A. A. Petrov, *Phys. Lett. B* **670**, 174 (2008).
- [105] J. Knodlseder *et al.*, *Astron. Astrophys.* **441**, 513 (2005).
- [106] P. Jean *et al.*, *Astron. Astrophys.* **445**, 579 (2006).
- [107] B. Allen, In *Les Houches 1995, Relativistic gravitation and gravitational radiation*, pp. 373-417; arXiv:gr-qc/9604033.
- [108] M. Maggiore, arXiv:gr-qc/9803028.
- [109] A. Buonanno, In *Boulder 2002, Particle physics and cosmology*, pp. 855-892; arXiv:gr-qc/0303085.
- [110] L. P. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **40**, 409 (1975).
- [111] V. A. Rubakov, M. V. Sazhin and A. V. Veryaskin, *Phys. Lett. B* **115**, 189 (1982).
- [112] R. Fabbri and M. d. Pollock, *Phys. Lett. B* **125**, 445 (1983).
- [113] L. F. Abbott and M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **244**, 541 (1984).
- [114] A. A. Starobinsky, *Sov. Astron. Lett.* **11**, 133 (1985).
- [115] B. Allen, E. E. Flanagan and M. A. Papa, *Phys. Rev. D* **61**, 024024 (2000).
- [116] T. L. Smith, M. Kamionkowski and A. Cooray, *Phys. Rev. D* **73**, 023504 (2006).
- [117] S. Y. Khlebnikov and I. I. Tkachev, *Phys. Rev. D* **56**, 653 (1997).
- [118] R. Easther and E. A. Lim, *JCAP* **0604**, 010 (2006).

- [119] J. F. Dufaux, A. Bergman, G. N. Felder, L. Kofman and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **76**, 123517 (2007).
- [120] J. F. Dufaux, G. N. Felder, L. Kofman and O. Navros, JCAP **0903**, 001 (2009).
- [121] J. Garcia-Bellido, D. G. Figueroa and A. Sastre, Phys. Rev. D **77**, 043517 (2008).
- [122] J. F. Dufaux, Phys. Rev. Lett. **103**, 041301 (2009).
- [123] C. Grojean and G. Servant, Phys. Rev. D **75**, 043507 (2007).
- [124] C. J. Hogan, Phys. Rev. D **74**, 043526 (2006).
- [125] M. R. DePies and C. J. Hogan, Phys. Rev. D **75**, 125006 (2007).
- [126] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rept. **373**, 1 (2003).
- [127] M. Gasperini, arXiv:hep-th/9907067.
- [128] C. J. Hogan, Phys. Rev. Lett. **85**, 2044 (2000).
- [129] R. Anantua, R. Easther and J. T. Giblin, Phys. Rev. Lett. **103**, 111303 (2009).
- [130] S. Matarrese, O. Pantano and D. Saez, Phys. Rev. Lett. **72**, 320 (1994).
- [131] S. Mollerach, D. Harari and S. Matarrese, Phys. Rev. D **69**, 063002 (2004).
- [132] K. N. Ananda, C. Clarkson and D. Wands, Phys. Rev. D **75**, 123518 (2007).
- [133] D. Baumann, P. J. Steinhardt, K. Takahashi and K. Ichiki, Phys. Rev. D **76**, 084019 (2007).
- [134] B. Abbott *et al.* [LIGO Collaboration], Astrophys. J. **659**, 918 (2007).
- [135] B. Abbott *et al.* [The LIGO Scientific Collaboration & The Virgo Collaboration], Nature **460**, 990 (2009).
- [136] L. A. Boyle and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **77**, 063504 (2008).

- [137] T. L. Smith, M. Kamionkowski and A. Cooray, Phys. Rev. D **78**, 083525 (2008).
- [138] D. Lindley, MNRAS **193**, 593 (1980).
- [139] D. Clancy, R. Guedens and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **68**, 023507 (2003).
- [140] H. Tashiro and N. Sugiyama, Phys. Rev. D **78**, 023004 (2008).
- [141] J. R. Chisholm, Phys. Rev. D **73**, 083504 (2006).
- [142] R. G. Daghighi and J. I. Kapusta, Phys. Rev. D **65**, 064028 (2002).
- [143] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **14** (1976) 2460.
- [144] G. 't Hooft, Int. J. Mod. Phys. A **11**, 4623 (1996).
- [145] S. B. Giddings and M. Lippert, Phys. Rev. D **69**, 124019 (2004).
- [146] S. B. Giddings, Phys. Rev. D **74**, 106005 (2006).
- [147] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **256**, 727 (1985).
- [148] L. Susskind, L. Thorlacius and J. Uglum, Phys. Rev. D **48**, 3743 (1993).
- [149] C. R. Stephens, G. 't Hooft and B. F. Whiting, Class. Quant. Grav. **11**, 621 (1994).
- [150] *Черные дыры - мембранный подход*, под ред. К. Торна, Р. Прайса, Д. Макдоналда, Мир, Москва (1981).
- [151] L. Susskind, hep-th/9309145.
- [152] T. Damour and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **568**, 93 (2000).
- [153] G. T. Horowitz and J. Polchinski, Phys. Rev. D **55**, 6189 (1997).
- [154] E. Halyo, B. Kol, A. Rajaraman and L. Susskind, Phys. Lett. B **401**, 15 (1997).
- [155] L. Susskind, Phys. Rev. D **49**, 6606 (1994).
- [156] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, "*Gravitation*" (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).

- [157] В. Б. Петков, В. И. Волченко, Г. В. Волченко и др., ПТЭ, т. **49**, N 6, с. 50 (2006).
- [158] D. E. Alexandreas, G. E. Allen, D. Berley, et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 2524 (1993).
- [159] B. Funk, J. Gonzalez, H. Krawczynski, et. al., Proc. 24th International Cosmic Ray Conference, Rome (Italy), v.2, 104 (1995).
- [160] M. Amenomori, Z. Cao, B. Z. Dai, et. al., Proc. 24th International Cosmic Ray Conference, Rome (Italy), v.2, 112 (1995).
- [161] E. T. Linton, R. W. Atkins, H. M. Badran, et al., JCAP **0601**, 013 (2006).
- [162] M. Aglietta, B. Alessandro, P. Antonioli, et al., Astrophys. J. **469**, 305 (1996).
- [163] V. V. Alexeenko, A. B. Chernyaev, V. B. Petkov, et al., Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **110**, 472 (2002).
- [164] В. Б. Петков, В. В. Алексеенко, В. И. Волченко и др., Кинематика и физика небесных тел **4**, 234 (2003).
- [165] S. Vernetto, Astropart. Phys. **13**, 75 (2000).
- [166] Е. Н. Алексеев, П. Я. Глемба, А. С. Лидванский и др., Известия АН СССР, сер. физ. **40**, с. 994 (1976).
- [167] Д.Д. Джаппуев, В. В. Алексеенко, В. И. Волченко и др., Известия РАН, сер. физ. **71**, с. 542 (2007).
- [168] C. E. Fichtel *et al.*, Astrophys. J. **434**, 557 (1994).
- [169] M. Schroedter *et al.*, Astropart. Phys. **31**, 102 (2009).
- [170] R. Hagedorn, Nuovo Cim. Suppl. **3**, 147 (1965).

**Основные результаты диссертации опубликованы в работах:**

1. E. Bugaev and P. Klimai, “*Large curvature perturbations near horizon crossing in single-field inflation models*”, Phys. Rev. D **78**, 063515 (2008).
2. E. Bugaev and P. Klimai, “*Constraints on amplitudes of curvature perturbations from primordial black holes*”, Phys. Rev. D **79**, 103511 (2009).
3. E. Bugaev and P. Klimai, “*Induced gravitational wave background and primordial black holes*”, Phys. Rev. D **81**, 023517 (2010).
4. В. Б. Петков, Э. В. Бугаев, П. А. Климай и Д. В. Смирнов, “*Ограничения на концентрацию испаряющихся первичных черных дыр для хромосферных моделей испарения*”, Письма в ЖЭТФ **87**, 3 (2008).
5. E. Bugaev and P. Klimai, “*Bound on induced gravitational wave background from primordial black holes*”, Письма в ЖЭТФ **91**, 3 (2010).
6. В. Б. Петков, Э. В. Бугаев, П. А. Климай и др., “*Поиск всплесков гамма-излучения сверхвысокой энергии от испаряющихся первичных черных дыр*”, Письма в АЖ **34**, 563 (2008).
7. В. Б. Петков, Э. В. Бугаев, П. А. Климай и др., “*Экспериментальный поиск всплесков гамма-излучения от испаряющихся первичных черных дыр*”, ЖЭТФ **137**, 460 (2010).
8. E. Bugaev, P. Klimai and V. Petkov, “*Photon spectra from final stages of a primordial black hole evaporation in different theoretical models*”, Proc. of the 30th International Cosmic Ray Conference; R. Caballero et al (eds.);

Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico City, Mexico, 2008; Vol. 3 (OG part 2), p. 1123-1126. Также в arXiv:0706.3778 [astro-ph].

9. П. А. Климай, Э. В. Бугаев, “Спектры масс первичных черных дыр и ограничения на параметры моделей ранней Вселенной”, Труды 51-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”: Часть VIII. Проблемы современной физики. — М.: МФТИ, 2008, с. 145-148.
10. E. V. Bugaev and P. A. Klimai, “Large curvature perturbations in single-scalar-field models of inflation”, Proc. of 15th International Seminar on High Energy Physics QUARKS-2008 (Sergiev Posad, Russia, 2008). — Vol. 1, p. 329 - 343.
11. П. А. Климай, Э. В. Бугаев, “Взаимосвязь спектра первичных флуктуаций плотности и величины фона гравитационных волн во Вселенной”, Труды 52-й научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”: Часть VIII. Проблемы современной физики. — М.: МФТИ, 2009, с. 118-121.
12. E. Bugaev and P. Klimai, “Constraints on power spectrum of density fluctuations from PBH evaporations”, arXiv:astro-ph/0612659.
13. В. Б. Петков, Э. В. Бугаев, П. А. Климай, А. Н. Гапоненко, П. С. Стриганов, “О методике поиска всплесков гамма-излучения сверхвысокой энергии от испаряющихся первичных черных дыр на ливневых установках”, Препринт ИЯИ РАН - 1209/2008 (2008).

14. E. V. Bugaev, V. B. Petkov, A. N. Gaponenko, P. A. Klimai *et al.*,  
*“Experimental search of bursts of very high energy gamma rays from primordial black holes”*, arXiv:0906.3179 [astro-ph.CO].
15. E. V. Bugaev, V. B. Petkov, A. N. Gaponenko, P. A. Klimai *et al.*,  
*“Experimental search of bursts of gamma rays from primordial black holes using different evaporation models”*, arXiv:0906.3182 [astro-ph.CO].